

Prognose bleibender Verformungen infolge zyklischer Belastung mit veränderlicher Amplitude: Eine Diskussion unterschiedlicher Ansätze

Dr.-Ing. Torsten Wichtmann,

Univ. Prof. Dr.-Ing. habil. Theodoros Triantafyllidis

Institut für Bodenmechanik und Felsmechanik

Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

Zusammenfassung

Der vorliegende Beitrag diskutiert unterschiedliche Ansätze zur Behandlung einer zyklischen Belastung mit veränderlicher Amplitude. In der Regel werden solche Belastungen in Pakete mit jeweils konstanten Werten von Amplitude und Mittelwert zerlegt. Es wird gezeigt, die Gleichungen des von den Autoren verwendeten Akkumulationsmodells in etwa das von Stewart [16] vorgeschlagene Konzept der Dehnungssuperposition umsetzen. Da Nachrechnungen mit dem Akkumulationsmodell die in Triaxialversuchen mit Zyklenpaketen gemessenen Akkumulationskurven reproduzieren können, scheint der Ansatz von Stewart [16] für die Behandlung von Zyklenpaketen geeignet. Der Beitrag erläutert weiterhin, dass die Gleichungen des Entwurfs der EA Pfähle (2011) [2] diesen Ansatz für drei oder mehr Zyklenpakete nicht zutreffend umsetzen und daher nach Meinung der Autoren revidiert werden sollten. Anhand eines einfachen Beispiels kann gezeigt werden, dass die vereinzelt in der Literatur verwendete "Strain Hardening"-Methode ungeeignet ist. Die Gültigkeit der Miner'schen Regel für sich ändernde mittlere Spannungen kann auf Basis numerischer Berechnungen mit dem Akkumulationsmodell angezweifelt werden.

1 Einleitung

Die Belastung von Offshore-Windenergieanlagen (OWEA) durch Wind und Wellen ist stochastischer Natur. Sie ist durch eine Vielzahl unterschiedlicher Amplituden und Richtungen gekennzeichnet. Für Rechenmodelle muss diese stochastische Belastung i.d.R. in Pakete mit jeweils

konstanten Werten von Amplitude, Mittelwert und Richtung zerlegt werden. Hierfür wird z.B. die Methode des "Rainflow Counting" (Rycklik [15], Leblanc et al. [8]) angewendet. Für die Prognose von bleibenden Verformungen auf Basis dieser Pakete wurden in der Literatur unterschiedliche Ansätze vorgeschlagen, die in den folgenden Abschnitten diskutiert und miteinander verglichen werden.

Um die Verformungsentwicklung in Triaxialversuchen mit Zyklenpaketen an Schotter zu beschreiben, schlug Stewart [16] ein als "Dehnungssuperposition" bezeichnetes Verfahren vor (siehe Abschnitt 2). Im Straßenbau wurden vergleichbare Methoden schon früher angewendet (z.B. Monismith [12]). Die Vorgehensweise ähnelt den Schädigungsmodellen der Ermüdungsmechanik und erfüllt, wie später noch gezeigt wird, näherungsweise die Miner'sche Regel (Miner [11]), d.h. die Reihenfolge der Pakete mit unterschiedlicher Amplitude spielt eine untergeordnete Rolle für den Endwert der bleibenden Verformung.

Später wurde der Ansatz nach Stewart [16] auf die Systemebene übertragen, z.B. von Lin & Liao [10] für horizontal zyklisch belastete Pfähle. Auf Stewart [16] und Lin & Liao [10] beziehen sich auch viele aktuelle Arbeiten zu den Gründungen von Offshore-Windenergieanlagen (z.B. Achmus et al. [1], Dührkop [3], Taşan et al. [17]) sowie der Entwurf der EA Pfähle (2011) [2].

Man kann jedoch zeigen, dass die Gleichungen des Entwurfs der EA Pfähle (2011) [2] den Ansatz von Stewart [16] für mehr als zwei Zyklenpakete nicht umsetzen (Abschnitt 3). Die Vorgehensweise nach Entwurf EA Pfähle (2011) [2] muss daher als eigenständiges Verfahren betrachtet werden.

Die auf Monismith et al. [13] zurückgehende "Strain-Hardening"-Methode (vergleiche Taşan et al. 2011 [17]) als Alternative zur auch als "Time-Hardening"-Methode bezeichneten Vorgehensweise nach Stewart [16] wird im Abschnitt 4 kritisch diskutiert.

Die Autoren dieses Beitrags verwenden für die Prognose von bleibenden Verformungen oder Spannungsänderungen infolge zyklischer Belastung die Finite-Elemente Methode und eine spezielle Rechenstrategie mit Hilfe eines Akkumulationsmodells (Niemunis et al. [14], Wichtmann [18]). Im Abschnitt 5 wird dessen Anwendung auf Zyklenpakete erläutert.

Abschnitt 6 enthält eine Diskussion der Miner'schen Regel für sich ändernde mittlere Spannungen.

Im Abschnitt 7 wird die Eignung unterschiedlicher Ansätze (Logarithmus- und Potenzfunktionen) für die Entwicklung der bleibenden Verformungen mit der Zyklenanzahl vor dem Hintergrund von Laborversuchen an Sanden mit unterschiedlichen Korngrößenverteilungskurven diskutiert.

2 Vorgehensweise nach Stewart [16]

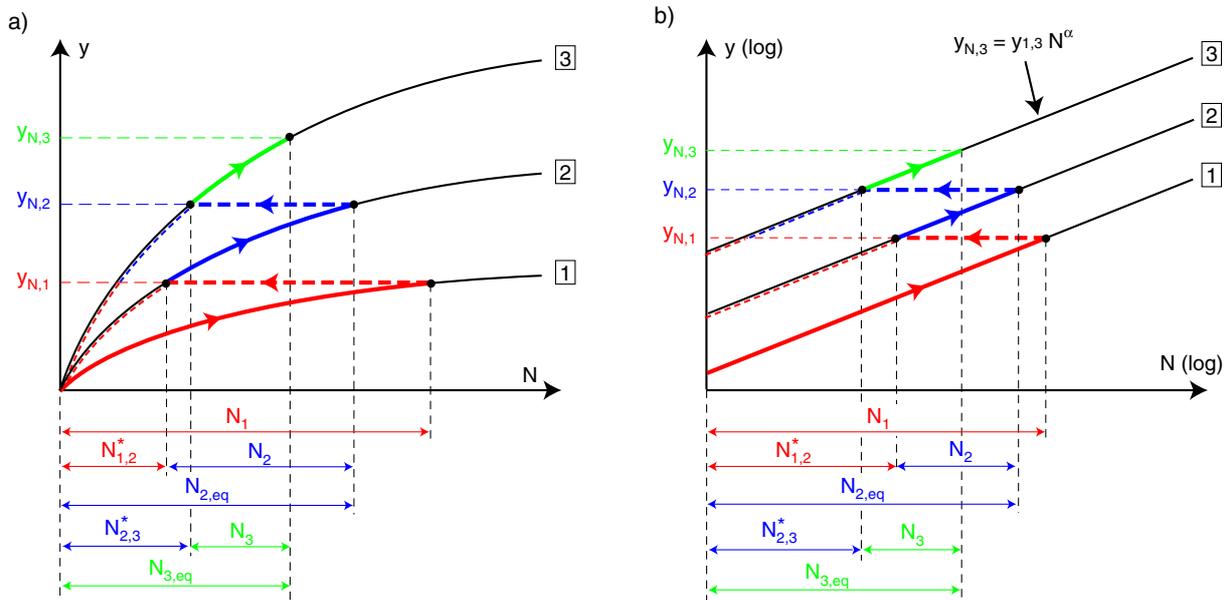


Bild 1: Vorgehensweise zur Behandlung von Zyklenspaketen nach Stewart [16]: a) lineare und b) doppeltlogarithmische Skalierung der Achsen

Die Vorgehensweise nach Stewart [16] ist für drei Zyklenspakete und eine aufsteigende Reihenfolge der Amplituden in Bild 1 schematisch dargestellt, im Bild 1a mit einer linearen und im Bild 1b mit einer doppeltlogarithmischen Skalierung der Achsen. Auf der Ordinate ist die bleibende Horizontalverschiebung y eines horizontal zyklisch belasteten Pfahls aufgetragen. Für die bleibende Dehnung auf Elementebene ist die Vorgehensweise analog anzuwenden. Nach N_1 Zyklen mit der kleinsten Amplitude 1 verbleibt eine Verschiebung $y_{N,1}$. Diese Verschiebung wird in eine äquivalente Zyklenanzahl $N_{1,2}^*$ für die Amplitude 2 des zweiten Zyklenspaketes umgerechnet, d.h. $N_{1,2}^*$ Zyklen mit der Amplitude 2 verursachen die gleiche bleibende Verschiebung wie N_1 Zyklen mit der Amplitude 1. Diese Umrechnung entspricht einer horizontalen Projektion des auf der Kurve 1 gelegenen Punktes $(N_1, y_{N,1})$ auf den Punkt $(N_{1,2}^*, y_{N,1})$ auf der Kurve 2. Bei der Berechnung der Akkumulation infolge des zweiten Paketes mit N_2 Zyklen wird die zyklische Vorbelastung infolge des ersten Paketes berücksichtigt, d.h. die Berechnung beginnt im Punkt $(N_{1,2}^*, y_{N,1})$ und folgt der Kurve 2 bis zum Punkt $(N_{2,eq}, y_{N,2})$ mit $N_{2,eq} = N_{1,2}^* + N_2$. Anschließend wird die Verschiebung $y_{N,2}$ in eine äquivalente Zyklenanzahl $N_{2,3}^*$ bezogen auf die Amplitude 3 umgerechnet, was einer horizontalen Projektion des Punktes $(N_{2,eq}, y_{N,2})$ auf den Punkt $(N_{2,3}^*, y_{N,2})$ entspricht. In diesem Punkt beginnt die Berechnung von N_3 Zyklen der Amplitude 3, womit sich schließlich die bleibende Verschiebung $y_{N,3}$ infolge der drei Zyklenspakete ergibt. Die Anwendung auf eine absteigende Amplitudenreihenfolge ist analog.

Wird die Akkumulation infolge von N_i Zyklen mit der Amplitude "i" durch eine Logarithmusfunktion der Form

$$y_{N,i} = y_{1,i}[1 + t \ln(N_i)] \quad (1)$$

beschrieben (z.B. Hettler [5], Stewart [16], Lin und Liao [10]), mit der Verschiebung $y_{1,i}$ infolge des ersten Zyklus und einem Parameter t , so kann man die Verschiebungen $y_{N,1}$, $y_{N,2}$ und $y_{N,3}$ nach dem ersten, zweiten und dritten Zyklenpaket folgendermaßen berechnen:

$$y_{N,1} = y_{1,1}[1 + t \ln(N_1)] \quad (2)$$

$$N_{1,2}^* = \exp \left\{ \frac{1}{t} \left[\frac{y_{N,1}}{y_{1,2}} - 1 \right] \right\} = \exp \left\{ \frac{1}{t} \left[\frac{y_{1,1}[1 + t \ln(N_1)]}{y_{1,2}} - 1 \right] \right\} \quad (3)$$

$$y_{N,2} = y_{1,2}[1 + t \ln(N_{1,2}^* + N_2)] = y_{1,2}[1 + t \ln(N_{2,eq})] \quad (4)$$

$$N_{2,3}^* = \exp \left\{ \frac{1}{t} \left[\frac{y_{N,2}}{y_{1,3}} - 1 \right] \right\} = \exp \left\{ \frac{1}{t} \left[\frac{y_{1,2}[1 + t \ln(N_{1,2}^* + N_2)]}{y_{1,3}} - 1 \right] \right\} \quad (5)$$

$$y_{N,3} = y_{1,3} [1 + t \ln(N_{2,3}^* + N_3)] = y_{1,3} [1 + t \ln(N_{3,eq})] \quad (6)$$

Für i Zyklenpakete kann man allgemein schreiben:

$$N_{i-1,i}^* = \exp \left\{ \frac{1}{t} \left[\frac{y_{N,i-1}}{y_{1,i}} - 1 \right] \right\} = \exp \left\{ \frac{1}{t} \left[\frac{y_{1,i-1}[1 + t \ln(N_{i-2,i-1}^* + N_{i-1})]}{y_{1,i}} - 1 \right] \right\} \quad (7)$$

$$y_{N,i} = y_{1,i} [1 + t \ln(N_{i-1,i}^* + N_i)] = y_{1,i} [1 + t \ln(N_{i,eq})] \quad (8)$$

Wählt man anstelle der Logarithmusfunktion einen Potenzansatz der Form

$$y_{N,i} = y_{1,i}(N_i)^\alpha \quad (9)$$

(z.B. Leblanc et al. [9, 8], Taşan et al. [17]), so lauten die rekursiven Formeln für die äquivalente Zyklenanzahl $N_{i-1,i}^*$ und die bleibende Verschiebung $y_{N,i}$ nach dem Zyklenpaket i :

$$N_{i-1,i}^* = \left(\frac{y_{N,i-1}}{y_{1,i}} \right)^{1/\alpha} = \left(\frac{y_{1,i-1}}{y_{1,i}} \right)^{1/\alpha} (N_{i-2,i-1}^* + N_{i-1}) \quad (10)$$

$$y_{N,i} = y_{1,i}(N_{i-1,i}^* + N_i)^\alpha \quad (11)$$

Es sei darauf hingewiesen, dass die Vorgehensweise nach Stewart [16] von manchen Autoren nur auf den akkumulierten Anteil der Verformung, d.h. ohne die statische Belastung bzw. den ersten Zyklus angewendet wird (z.B. Leblanc et al. [9, 8]), von anderen auf die Gesamtdehnung, d.h. inklusive der statischen Belastung und des ersten Zyklus (z.B. Lin und Liao [10], Taşan et al. [17]).

3 Vorgehensweise nach dem Entwurf der EA Pfähle (2011)

Im Abschnitt D.4.1.2 des Anhangs D "Berechnungsverfahren und -beispiele für zyklisch belastete Pfähle" des Entwurfs der EA Pfähle (2011) [2] wird die für Zyklenpakete empfohlene

Vorgehensweise anhand der Logarithmusfunktion (1) erläutert. Die Gleichungen im Entwurf der EA Pfähle (2011) [2] werden hier insofern modifiziert wiedergegeben, als dass die Referenzamplitude mit dem Index "ref" anstelle von "1" gekennzeichnet wird. Auf diese Amplitude werden alle anderen Amplituden (hier nummeriert von 1 bis k) bezogen. Die bleibende Verschiebung infolge der $k + 1$ Zyklenpakete ist dann:

$$y_N = y_{1,\text{ref}} \left[1 + t \ln \left(N_{\text{ref}} + \sum_{i=1}^k N_{i,\text{ref}}^* \right) \right] = y_{1,\text{ref}} [1 + t \ln(N_{\text{ref,eq}})] \quad (12)$$

mit

$$N_{i,\text{ref}}^* = \exp \left\{ \frac{1}{t} \left[\frac{y_{1,i} [1 + t \ln(N_i)]}{y_{1,\text{ref}}} - 1 \right] \right\} \quad (13)$$

Die Gleichungen (12) und (13) werden im Entwurf der EA Pfähle (2011) [2], wie auch bei Achmus et al. [1], als Umsetzung des Ansatzes von Stewart [16] beschrieben, was unserer Meinung nach nicht zutreffend ist.

Für zwei Pakete mit den Zyklenanzahlen N_1 und N_2 und den bleibenden Verschiebungen $y_{1,1}$ und $y_{1,2}$ nach dem ersten Zyklus ergeben die Gleichungen (12) und (13) unter Verwendung der Amplitude 2 als Referenz noch die gleiche Lösung wie die Gleichungen (7) und (8):

$$N_{1,2}^* = \exp \left\{ \frac{1}{t} \left[\frac{y_{1,1} [1 + t \ln(N_1)]}{y_{1,2}} - 1 \right] \right\} \quad (14)$$

$$y_N = y_{N,2} = y_{1,2} [1 + t \ln(N_{1,2}^* + N_2)] = y_{1,2} [1 + t \ln(N_{2,\text{eq}})] \quad (15)$$

Für drei oder mehr Zyklenpakete weichen die Gleichungen (12) und (13) jedoch von den Gleichungen (7) und (8) ab. Betrachtet man drei Zyklenpakete und wählt die Amplitude des dritten Paketes als Referenz, erhält man:

$$N_{1,3}^* = \exp \left\{ \frac{1}{t} \left[\frac{y_{1,1} [1 + t \ln(N_1)]}{y_{1,3}} - 1 \right] \right\} \quad (16)$$

$$N_{2,3}^* = \exp \left\{ \frac{1}{t} \left[\frac{y_{1,2} [1 + t \ln(N_2)]}{y_{1,3}} - 1 \right] \right\} \quad (17)$$

$$y_{N,3} = y_{1,3} [1 + t \ln(N_{1,3}^* + N_{2,3}^* + N_3)] = y_{1,3} [1 + t \ln(N_{3,\text{eq}})] \quad (18)$$

Die graphische Umsetzung der Gleichungen (12) und (13) für drei Zyklenpakete mit aufsteigender Amplitudenreihenfolge ist im Bild 2 dargestellt. Als Referenz wird die größte Amplitude 3 gewählt. Alle Zyklenpakete mit Amplituden ungleich der Referenzamplitude werden zunächst separat behandelt. Die bleibende Verschiebung $y_{N,1}$, die sich infolge der N_1 Zyklen mit der Amplitude 1 ergibt, wird in die äquivalente Zyklenanzahl $N_{1,3}^*$, bezogen auf die Amplitude 3 umgerechnet. Dies entspricht einer horizontalen Projektion der Verschiebung $y_{N,1}$ von der Kurve 1 auf die Kurve 3. Analog wird die bleibende Verschiebung $y_{N,2}$, die sich infolge von N_2 Zyklen

mit der Amplitude 2 in einem nicht vorbelasteten Boden ergeben würde, in die äquivalente Zyklusanzahl $N_{2,3}^*$, bezogen auf die Amplitude 3 umgerechnet. Dies entspricht einer horizontalen Projektion der Verschiebung $y_{N,2}$ von der Kurve 2 auf die Kurve 3. Abschließend werden die äquivalenten Zyklusanzahlen $N_{1,3}^*$ und $N_{2,3}^*$ sowie die Zyklusanzahl N_3 der Belastung mit der Referenzamplitude addiert und die Gesamtverschiebung y_N wird als Verschiebung infolge von $N_{1,3}^* + N_{2,3}^* + N_3$ Zyklen mit der Amplitude 3 berechnet.

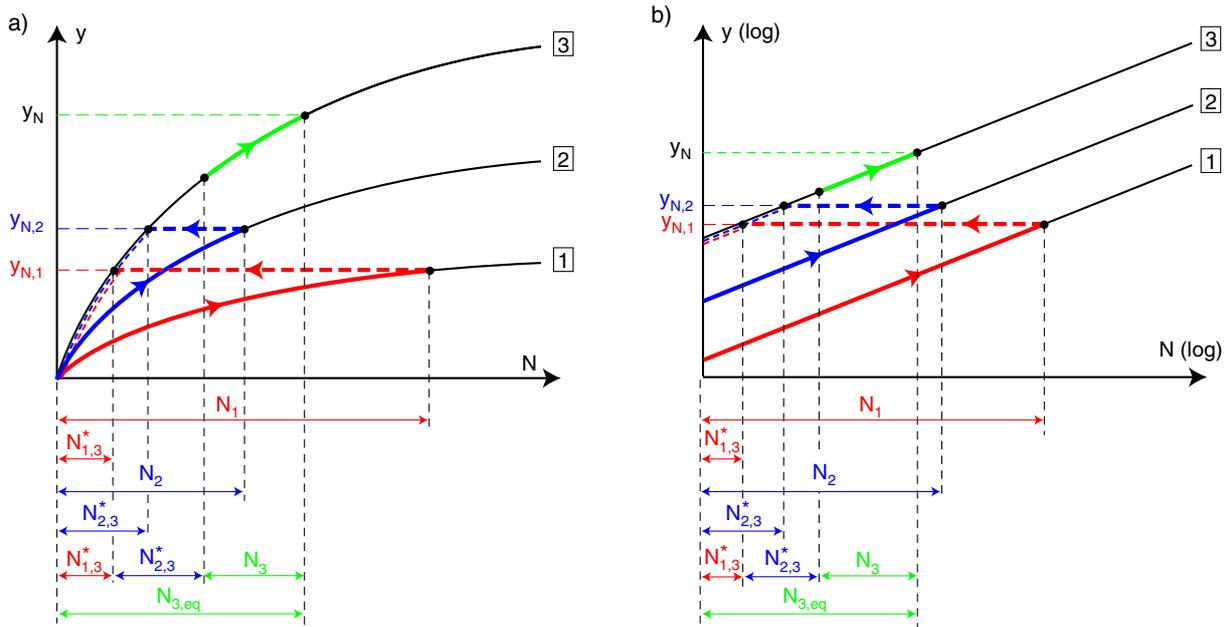


Bild 2: Vorgehensweise zur Behandlung von Zykluspaketen nach Entwurf EA Pfähle (2011) [2], Anhang D.4.1.2: a) lineare und b) doppeltlogarithmische Skalierung der Achsen

Vergleicht man die Bilder 1 und 2, wird der Unterschied zwischen der Vorgehensweise nach EA Pfähle und dem Ansatz von Stewart [16] deutlich. Bei der Berechnung der äquivalenten Zyklusanzahl des zweiten Paketes $N_{2,3}^*$ wird die zyklische Vorbelastung infolge des ersten Paketes bei der Vorgehensweise nach Entwurf EA Pfähle (2011) [2] nicht berücksichtigt, d.h. $N_{2,3}^*$ wird für einen unvorbelasteten Boden ermittelt, die äquivalente Zyklusanzahl somit überschätzt. Anders verhält es sich bei einer absteigenden Reihenfolge der Amplituden. Dort kommt es zu einer Unterschätzung der äquivalenten Zyklusanzahl, d.h. es werden kleinere Verformungen als mit der Methode nach Stewart [16] prognostiziert. Der Unterschied zwischen Entwurf EA Pfähle (2011) [2] und Stewart [16] ist umso größer, je mehr Zykluspakete gerechnet werden. Solange stets die größte Amplitude eines Lastkollektivs als Referenz gewählt wird, liegt die Vorgehensweise des Entwurfs der EA Pfähle (2011) [2] auf der sicheren Seite. Der Entwurf der EA Pfähle (2011) [2] lässt die Wahl der Referenzamplitude jedoch ausdrücklich offen.

Man kann auch zeigen, dass die im Entwurf der EA Pfähle (2011) [2] vorgeschlagene Vorge-

Klasse	Anzahl der Zyklen N_i	Verschiebung nach 1.Zyklus $y_{1,i}$ [cm]	$N_{i,1}^*$
1	5	3,7	5
2	40	3,3	15,63
3	250	2,8	19,34
4	1800	2,3	15,92
5	12000	1,9	10,92
6	80000	1,5	4,97
7	550000	1,1	1,52

$$N_{\text{eq}} = \mathbf{73,30}$$

Tabelle 1: Rechnung des Beispiels in Tabelle D4.4 des Entwurfs der EA Pfähle (2011) [2] mit den Gleichungen (12) und (13), Bezug auf Klasse 1

hensweise die Miner'sche Regel weit weniger gut erfüllt als der Ansatz von Stewart [16]. Wertet man die Gleichungen (12) und (13) für das Beispiel in Tabelle D4.4 des Entwurfs der EA Pfähle (2011) [2] aus und wählt man die größte Amplitude (Klasse 1) als Referenz, so erhält man die in der Tabelle D4.5 des Entwurfs der EA Pfähle (2011) [2] angegebene äquivalente Zyklenanzahl $N_{\text{eq}} = 73,30$ (siehe Rechnung in Tabelle 1). Aus Gleichung (1) ergibt sich mit $t = 0,2$ eine bleibende Verschiebung

$$y_N = 3,7 [1 + 0,2 \ln(73,30)] = 6,88 \text{ cm}$$

Wählt man jedoch die kleinste Amplitude (Klasse 7) als Referenz, so erhält man gemäß der Rechnung in Tabelle 2 mit Hilfe der Gleichungen (12) und (13) eine äquivalente Zyklenanzahl $N_{\text{eq}} = 6272303875$ und damit eine bleibende Verschiebung

$$y_N = 1,1 [1 + 0,2 \ln(6272303875)] = 6,06 \text{ cm}$$

Die Aussage des Entwurfs der EA Pfähle (2011) [2], dass sich in diesem Fall "selbstverständlich die gleiche resultierende Verschiebung" ergibt wie beim Bezug auf die Klasse 1, trifft demnach nicht zu. Im Bild 3a ist der Rechenweg für beide Bezugsamplituden graphisch dargestellt

In den Tabellen 3 und 4 haben wir das gleiche Beispiel mit den Gleichungen (7) und (8) berechnet. Bei einer aufsteigenden Reihenfolge der Amplituden (Klassen 7,6,...,1) erhält man eine Endverschiebung nach dem 7. Zyklenpaket von 6,63 cm (Tabelle 3), für eine absteigende Amplitudenreihenfolge (Klassen 1,2,...,7) ergibt sich 6,44 cm (Tabelle 4). Die Miner'sche Regel ist bei der Vorgehensweise nach Stewart [16] also auch nur näherungsweise erfüllt. Die Berechnung des Beispiels entsprechend der Methode von Stewart [16] ist graphisch im Bild 3b dargestellt.

Klasse	Anzahl der Zyklen N_i	Verschiebung nach 1. Zyklus $y_{1,i}$ [cm]	$N_{i,7}^*$
1	5	3,7	30454542
2	40	3,3	1409693811
3	250	2,8	2882432862
4	1800	2,3	1497469089
5	12000	1,9	421804470
6	80000	1,5	29899101
7	550000	1,1	550000

$$N_{\text{eq}} = \mathbf{6272303875}$$

Tabelle 2: Rechnung des Beispiels in Tabelle D4.4 des Entwurfs der EA Pfähle (2011) [2] mit den Gleichungen (12) und (13), Bezug auf Klasse 7

Klasse	Anzahl der Zyklen N_i	Verschiebung nach 1. Zyklus $y_{1,i}$ [cm]	N_i^* bezogen auf Paket $i + 1$	Äquivalente Zyklusanzahl $N_{i,\text{eq}} = N_i + N_{i-1}^*$	Verschiebung am Paketende $y_{N,i}$ [cm]
7	550000	1,1	4271,10	550000	4,01
6	80000	1,5	2701,11	84271,10	4,90
5	12000	1,9	1161,30	14701,11	5,55
4	1800	2,3	290,95	2961,30	5,98
3	250	2,8	97,73	540,95	6,32
2	40	3,3	47,10	137,73	6,55
1	5	3,7		52,10	6,63

Tabelle 3: Rechnung des Beispiels des Entwurfs der EA Pfähle (2011) [2], Tabelle D4.4 mit den Gleichungen (7) und (8) für aufsteigende Amplituden

Klasse	Anzahl der Zyklen N_i	Verschiebung nach 1. Zyklus $y_{1,i}$ [cm]	N_i^* bezogen auf Paket $i + 1$	Äquivalente Zyklusanzahl $N_{i,\text{eq}} = N_i + N_{i-1}^*$	Verschiebung am Paketende $y_{N,i}$ [cm]
1	5	3,7	11,14	5	4,89
2	40	3,3	252,15	51,14	5,90
3	250	2,8	5754,8	502,15	6,28
4	1800	2,3	141855,4	7554,8	6,41
5	12000	1,9	14105947	153855,4	6,44
6	80000	1,5	34846601665	14185947	6,44
7	550000	1,1		34847151665	6,44

Tabelle 4: Rechnung des Beispiels des Entwurfs der EA Pfähle (2011) [2], Tabelle D4.4 mit den Gleichungen (7) und (8) für absteigende Amplituden

Wie im Abschnitt 5 noch erläutert wird, bestätigen unsere Experimente in etwa den Ansatz von Stewart [16]. Vor diesem Hintergrund sollte die EA Pfähle nach Meinung der Autoren dahingehend verändert werden, dass die Gleichungen für Zyklenpakete den Ansatz von Stewart [16] exakt umsetzen. Daraus ergibt sich - wie man an dem Beispiel in den Tabellen 3 und 4 sieht - kein wesentlich höherer Berechnungsaufwand.

4 "Strain-Hardening"-Methode

Mit Bezug auf Monismith et al. [13] wird u.a. von Taşan et al. [17] die "Strain-Hardening"-Methode als Alternative zum Ansatz nach Stewart [16] (bezeichnet als "Time-Hardening"-Methode) verwendet. Das Verfahren ist im Bild 4 für eine aufsteigende Amplitudenreihenfolge schematisch dargestellt. Nach Abschluss des ersten Zyklenpaketes mit der Amplitude 1 erfolgt eine vertikale Projektion des Punktes $(N_1, y_{N,1})$ auf die Kurve der Amplitude 2. Die Berechnung der Akkumulation infolge der N_2 Zyklen des zweiten Paketes mit der Amplitude 2 startet in diesem Punkt.

Für einen Potenzansatz lässt sich die Vorgehensweise folgendermaßen mit Gleichungen beschreiben:

$$y_{N,1} = y_{1,1}N^\alpha \quad (19)$$

$$y_{N,2} = y_{N,1} + y_{1,2} [(N_1 + N_2)^\alpha - (N_1)^\alpha] \quad (20)$$

$$y_{N,3} = y_{N,2} + y_{1,3} [(N_1 + N_2 + N_3)^\alpha - (N_1 + N_2)^\alpha] \quad (21)$$

$$y_{N,i} = y_{N,i-1} + y_{1,i} \left[\left(\sum_1^i N_i \right)^\alpha - \left(\sum_1^{i-1} N_i \right)^\alpha \right] \quad (22)$$

Bei dieser Vorgehensweise wird die zyklische Vorbelastung nur über die Zyklenanzahl N definiert, die Amplitude der Zyklen in der Vergangenheit wird nicht berücksichtigt. So ist die Akkumulation während des zweiten Zyklenpaketes unabhängig davon, ob zuvor N_1 Zyklen mit der Amplitude 1 oder N_1 Zyklen mit der größeren Amplitude 2 aufgebracht wurden. Für die Berechnung des dritten Zyklenpaketes wird analog dazu angenommen, dass N_1 Zyklen mit der Amplitude 1 und N_2 Zyklen mit der Amplitude 2 die gleiche zyklische Vorbelastung bedeuten wie $(N_1 + N_2)$ Zyklen mit der größten Amplitude 3.

Diese Methode ist nach unserer Auffassung ungeeignet, da die zyklische Vorbelastung unzutreffend, d.h. ohne eine Berücksichtigung der Amplitude quantifiziert wird. Man kann diese Methode bereits anhand eines einfachen Beispiels disqualifizieren: Wird ein erstes Paket mit 10^8 Zyklen und verschwindend kleiner Amplitude aufgebracht, so verursacht dieses Paket zwar nur geringe

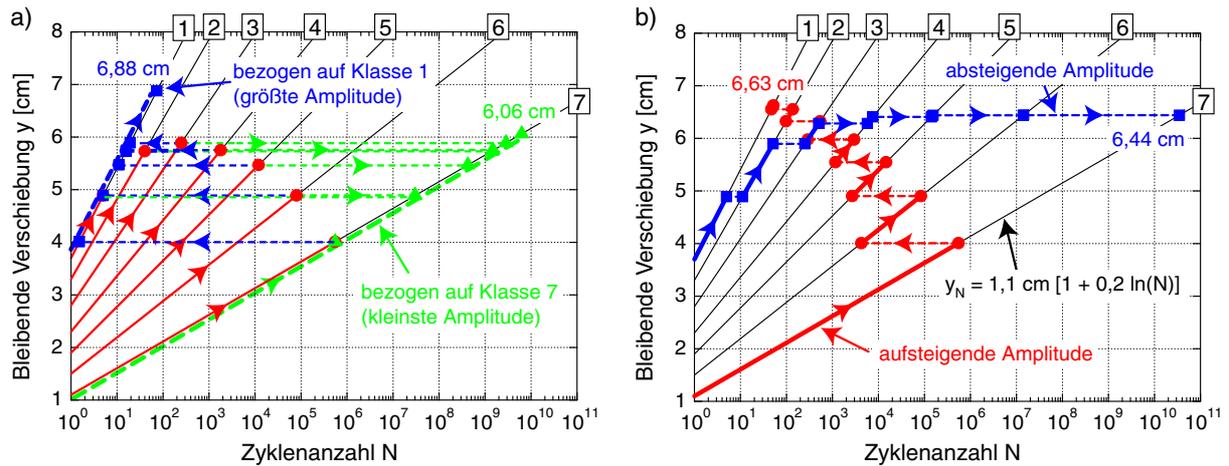


Bild 3: Illustration der Berechnung des Beispiels aus Tabelle D4.4 des Entwurfs der EA Pfähle (2011): a) Vorgehensweise nach Entwurf EA Pfähle (2011) [2] mit Gleichungen (7) und (8), b) Vorgehensweise nach Stewart [16] mit Gleichungen (12) und (13)

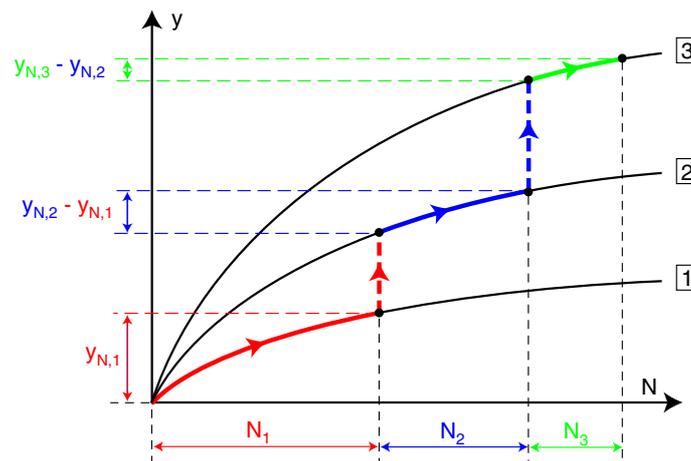


Bild 4: Vorgehensweise bei einer Berechnung nach der "Strain Hardening"-Methode

bleibende Verformungen, der Zyklenzähler N ist nach Abschluss des Paketes jedoch schon sehr groß. Mit der "Strain-Hardening"-Methode würden für ein folgendes Zykluspaket mit wesentlich größerer Amplitude aufgrund der großen N -Werte nur noch sehr geringe Akkumulationsraten prognostiziert, was unrealistisch ist. Die "Strain-Hardening"-Methode in der vorliegenden Form sollte nach Meinung der Autoren daher nicht weiter angewandt werden.

5 Akkumulationsmodell

5.1 Rechenstrategie, Gleichungen und Parameterkalibration

Der Ablauf einer Berechnung mit dem Akkumulationsmodell ist im Bild 5 schematisch für eine Flachgründung dargestellt.

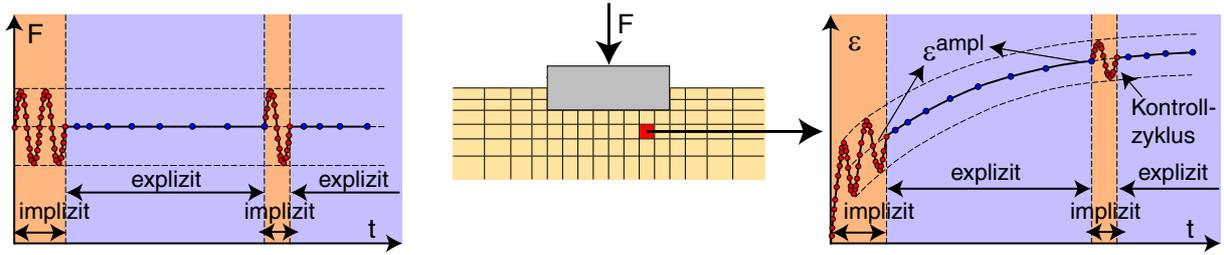


Bild 5: Schematischer Verlauf der kombinierten (impliziten/expliciten) Rechenstrategie

Die implizite Berechnung des ersten Zyklus mit einem konventionellen Stoffmodell (z.B. Hypoplastizität) ist notwendig, da es sich beim ersten Viertel des ersten Zyklus um eine Erstbelastung handelt. Aus der impliziten Berechnung des zweiten Zyklus erhält man das Feld der Dehnungsamplitude, welches ein wichtiger Inputparameter für die anschließende explizite Berechnung der weiteren Zyklen ist. Die explizite Berechnung erfolgt mit dem unten beschriebenen Akkumulationsmodell, welches mit Inkrementen ΔN der Zyklenanzahl arbeitet und die bleibende Dehnung oder Spannungsrelaxation infolge dieser ΔN Zyklen prognostiziert. Die äußeren Lasten werden während dieser expliziten Berechnung konstant auf ihren Mittelwerten gehalten (siehe Bild 5 links). Die Dehnungsamplitude wird während der expliziten Berechnung ebenfalls als konstant angenommen. Von Zeit zu Zeit sollte überprüft werden, ob sich das Feld der Dehnungsamplitude infolge von Spannungsumlagerungen oder Verdichtung verändert hat. Dazu wird ein implizit berechneter Kontrollzyklus zwischen die explizite Berechnung geschaltet (siehe Bild 5 rechts), in dem das Feld der Dehnungsamplitude aktualisiert wird. Im Anschluss an den Kontrollzyklus wird die explizite Berechnung fortgesetzt.

Die Vorteile dieser Vorgehensweise gegenüber einer rein impliziten Berechnung liegen in der Möglichkeit, eine uneingeschränkte Anzahl von Belastungszyklen zu betrachten (wesentlich geringerer Rechenaufwand) und in der deutlich niedrigeren Anzahl der berechneten Inkremente, womit auch der numerische Fehler klein gehalten wird.

Die Grundgleichung des hochzyklischen Akkumulationsmodells (Niemunis et al. [14]) lautet:

$$\dot{\sigma} = E : (\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^{\text{acc}} - \dot{\epsilon}^{\text{pl}}) \quad (23)$$

mit der Spannungsrate $\dot{\sigma}$, der druckabhängigen Steifigkeit E , der Dehnungsrate $\dot{\epsilon}$, der durch Gleichung (24) vorgegebenen Akkumulationsrate $\dot{\epsilon}^{\text{acc}}$ der Dehnung und der plastischen Dehnungsrate $\dot{\epsilon}^{\text{pl}}$ für Spannungspfade, die die Fließfläche berühren. Die Akkumulationsrate $\dot{\epsilon}^{\text{acc}}$ wird berechnet aus

$$\dot{\epsilon}^{\text{acc}} = \dot{\epsilon}^{\text{acc}} \mathbf{m} \quad (24)$$

mit dem Einheitstensor \mathbf{m} der Akkumulationsrichtung (z.B. übernommen aus dem Modified Cam clay-Modell) und der skalaren Akkumulationsintensität $\dot{\varepsilon}^{\text{acc}}$ mit

$$\dot{\varepsilon}^{\text{acc}} = f_{\text{ampl}} \dot{f}_N f_p f_Y f_e f_\pi \quad (25)$$

Die einzelnen Multiplikatoren in Gleichung (25) berücksichtigen jeweils einen Einflussparameter (siehe Tabelle 5). Die in der impliziten Berechnung ermittelte Dehnungsamplitude $\varepsilon^{\text{ampl}}$ geht in die Amplitudenfunktion f_{ampl} ein. Durch die spezielle Amplitudendefinition (siehe Niemunis et al. [14]) ist das Modell auch für multiaxiale Dehnungsschleifen anwendbar.

Abgesehen von der Funktion f_π , die für Belastungen mit gleichbleibender Richtung der Zyklen zu 1 gesetzt werden kann, benötigen die Funktionen für die Akkumulationsintensität sieben Parameter (siehe Tabelle 5). Für die Bestimmung eines Parametersatzes existieren drei Methoden, die sich in Aufwand und Genauigkeit unterscheiden:

1. Bestimmung aller Parameter aus mindestens 11 zyklischen Triaxialversuchen (mindestens 10^5 Zyklen) mit unterschiedlichen Amplituden, Anfangslagerungsdichten und mittleren Spannungen (siehe Wichtmann et al. [19, 21])
2. Abschätzung eines Teils der Parameter aus Korrelationen mit der Korngrößenverteilungskurve (d_{50} , C_u) bzw. der Porenzahl e_{min} bei dichtester Lagerung (siehe letzte Spalte in Tabelle 5 und Wichtmann et al. [21, 22]). Die restlichen Parameter sind aus zyklischen Triaxialversuchen zu bestimmen. So können z.B. die Parameter C_{ampl} , C_e , C_p und C_Y aus den Korrelationen abgeschätzt und die Parameter C_{N1} , C_{N2} und C_{N3} aus einem einzigen Versuch bestimmt werden. Diese Vorgehensweise wird als Mindeststandard empfohlen.
3. Abschätzung aller Parameter mit Hilfe der Korrelationen mit d_{50} , C_u und e_{min} . Da die Korrelationen die Kornbeschaffenheit (Form, Rauigkeit, Mineralogie) bisher nicht berücksichtigen, ist diese Methode zur Zeit nur für sehr grobe Abschätzungen empfehlenswert. Eine entsprechende Erweiterung der Korrelationen ist geplant.

In Bezug auf Wichtmann et al. [21] kann für die Steifigkeit E in Gleichung (23) eine isotrope Elastizität mit dem für Fein- und Mittelsand bestätigten druckabhängigen Kompressionsmodul $K = 467 p^{0,46} (p_{\text{atm}})^{1-0,46}$ und der Poissonzahl $\nu = 0,32$ verwendet werden.

Einflussparameter	Funktion	Parameter	Korrelation mit d_{50}, C_u, e_{\min}
Dehnungsamplitude	$f_{\text{ampl}} = (\varepsilon^{\text{ampl}}/10^{-4})^{C_{\text{ampl}}} \leq 100$		$C_{\text{ampl}} = 1,70$
Zyklische Vorbelastung	$\dot{f}_N = \dot{f}_N^A + \dot{f}_N^B$ $\dot{f}_N^A = C_{N1} C_{N2} \exp(-g^A/C_{N1}/f_{\text{ampl}})$ $\dot{f}_N^B = C_{N1} C_{N3}$	C_{N1} C_{N2} C_{N3}	$C_{N1} = 4,5 \cdot 10^{-4} \cdot [1 - 0,306 \ln(d_{50}/0,60)] \cdot [1 + 3,15 \cdot (C_u - 1,5)]$ $C_{N2} = 0,31 \cdot \exp[0,39(d_{50} - 0,6)] \cdot \exp[12,3 \cdot (\exp(-0,77 \cdot C_u) - 0,315)]$ $C_{N3} = 3,0 \cdot 10^{-5} \cdot \exp[-0,84 \cdot (d_{50} - 0,6)] \cdot [1 + 7,85 \cdot (C_u - 1,5)]^{0,34}$
Mittlerer Druck	$f_p = \exp[-C_p (p^{\text{av}}/100 - 1)]$	C_p	$C_p = 0,41 \cdot [1 - 0,34 \cdot (d_{50} - 0,6)]$
Spannungsverhältnis	$f_Y = \exp(C_Y \bar{Y}^{\text{av}})$	C_Y	$C_Y = 2,60 \cdot [1 + 0,12 \cdot \ln(d_{50}/0,6)]$
Porenzahl	$f_e = \frac{(C_e - e)^2}{1 + e} \frac{1 + e_{\max}}{(C_e - e_{\max})^2}$	C_e	$C_e = 0,95 \cdot e_{\min}$
Polarisationsänderung	f_π , siehe Niemunis et al. [14]	$C_{\pi1}$ $C_{\pi2}$	

Tabelle 5: Funktionen und Materialparameter für die Akkumulationsintensität ε^{acc} , Abschätzung der Parameter anhand der Korngrößenverteilungskurve

5.2 Berücksichtigung der zyklischen Vorbelastungsgeschichte im Akkumulationsmodell

Für eine gleichbleibende Dehnungsamplitude und eine gleichbleibende Richtung ($f_\pi = 1$) kann die bleibende Dehnung mit Hilfe der Gleichung

$$\varepsilon^{\text{acc}} = f_{\text{ampl}} f_N f_p f_Y f_e \quad (26)$$

mit

$$f_N = C_{N1} [\ln(1 + C_{N2} N) + C_{N3} N] \quad (27)$$

berechnet werden. Für Belastungen mit variierender Amplitude kann Gleichung (27) in dieser Form nicht mehr verwendet werden. Eine Variable für die zyklische Vorbelastung muss neben der Anzahl auch die Amplitude der Zyklen in der Vergangenheit berücksichtigen. Zur Herleitung einer geeigneten Variable wird die Ableitung der Funktion f_N zunächst in zwei Teile zerlegt:

$$\dot{f}_N = \frac{C_{N1} C_{N2}}{1 + C_{N2} N} + C_{N1} C_{N3} = \dot{f}_N^A + \dot{f}_N^B \quad (28)$$

Das Produkt aus f_{ampl} und \dot{f}_N wird mit \dot{g} bezeichnet:

$$\dot{g} = f_{\text{ampl}} \dot{f}_N = f_{\text{ampl}} (\dot{f}_N^A + \dot{f}_N^B) = f_{\text{ampl}} \dot{f}_N^A + f_{\text{ampl}} \dot{f}_N^B = \dot{g}^A + \dot{g}^B \quad (29)$$

Für die Quantifizierung der Vorgeschichte wird nur der Anteil \dot{g}^A benötigt, da nur dieser Anteil von der Zyklenanzahl abhängt. Für eine Belastung mit konstanter Amplitude kann die Vorbelastungsvariable g^A wie folgt ermittelt werden:

$$g^A = \int \dot{g}^A dN = \int f_{\text{ampl}} \dot{f}_N^A dN = f_{\text{ampl}} C_{N1} \ln(1 + C_{N2} N) \quad (30)$$

Stellt man diese Gleichung nach N um, erhält man

$$N = \frac{1}{C_{N2}} \left[\exp\left(\frac{g^A}{f_{\text{ampl}} C_{N1}}\right) - 1 \right] \quad (31)$$

Das Einsetzen von Gleichung (31) in \dot{f}_N^A gemäß Gleichung (28) liefert:

$$\dot{f}_N^A = C_{N1} C_{N2} \exp\left(-\frac{g^A}{f_{\text{ampl}} C_{N1}}\right) \quad (32)$$

und damit eine Beziehung zwischen der Rate der Vorbelastungsvariable und dem aktuellen Wert der Vorbelastungsvariable:

$$\dot{g}^A = f_{\text{ampl}} C_{N1} C_{N2} \exp\left(-\frac{g^A}{f_{\text{ampl}} C_{N1}}\right) \quad (33)$$

Die Rate der Variable g^B ist unabhängig von der zyklischen Vorbelastung:

$$\dot{g}^B = f_{\text{ampl}} C_{N1} C_{N3} \quad (34)$$

5.3 Vergleich des Akkumulationsmodells mit Stewart [16]

Anhand eines Beispiels mit drei Zyklenpaketen (siehe Tabelle 6) kann gezeigt werden, dass die in den Abschnitten 5.1 und 5.2 erläuterten Gleichungen des Akkumulationsmodells näherungsweise den Ansatz von Stewart [16] abbilden. Es werden die in der Tabelle 7 zusammengestellten Parameter des Akkumulationsmodells für einen offshore-ähnlichen Feinsand ($d_{50} = 0,14$ mm, $C_u = 1,5$, $e_{\min} = 0,677$, $e_{\max} = 1,054$) verwendet. Für eine Lagerungsdichte von $I_D = 0,6$ (entspricht Porenzahl $e = 0,828$) ergibt sich die Porenzahlfunktion zu $f_e = 0,283$. Für einen mittleren Spannungszustand mit $p^{\text{av}} = 200$ kPa und $\eta^{\text{av}} = q^{\text{av}}/p^{\text{av}} = 0,75$ erhält man $f_p = 0,787$ und $f_Y = 1,668$. Für das Beispiel werden die Funktionen f_e , f_p und f_Y als über die Zyklenanzahl konstant angenommen.

Die Handrechnung analog zu Stewart [16] ist im Bild 6 graphisch dargestellt. Würde man eine frisch gerieselte Triaxialprobe mit der konstanten Amplitude $\varepsilon_1^{\text{ampl}}$ des ersten Zyklenpaketes belasten, ergäbe sich die Entwicklung der bleibenden Dehnung mit der Zyklenanzahl entsprechend der roten Kurve in Bild 6:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\text{acc}}(N) &= f_{\text{ampl}} f_e f_p f_Y f_N \\ &= 2,497 \cdot 0,283 \cdot 0,787 \cdot 1,668 \cdot 3,03 \cdot 10^{-4} [\ln(1 + 0,37 \cdot N) + 2,36 \cdot 10^{-5} \cdot N] \\ &= 2,81 \cdot 10^{-4} [\ln(1 + 0,37 \cdot N) + 2,36 \cdot 10^{-5} \cdot N] \end{aligned}$$

Paket	Zyklusanzahl N_i	Dehnungsamplitude $\varepsilon_i^{\text{ampl}}$	Amplitudenfunktion f_i^{ampl}
1	10000	$2 \cdot 10^{-4}$	2,497
2	5000	$4 \cdot 10^{-4}$	6,233
3	1000	$6 \cdot 10^{-4}$	10,645

Tabelle 6: Zykluspakete für Rechenbeispiel

C_{ampl}	C_e	C_p	C_Y	C_{N1}	C_{N2}	C_{N3}
1,32	0,60	0,24	1,74	$3,03 \cdot 10^{-4}$	0,37	$2,36 \cdot 10^{-5}$

Tabelle 7: Parameter eines offshore-ähnlichen Feinsandes für das Akkumulationsmodell

Analog erhält man für die Amplitude des Zykluspaketes 2 (blaue Kurve in Bild 6):

$$\varepsilon^{\text{acc}}(N) = 7,02 \cdot 10^{-4} [\ln(1 + 0,37 \cdot N) + 2,36 \cdot 10^{-5} \cdot N]$$

und für die Amplitude des Zykluspaketes 3 (grüne Kurve in Bild 6):

$$\varepsilon^{\text{acc}}(N) = 11,98 \cdot 10^{-4} [\ln(1 + 0,37 \cdot N) + 2,36 \cdot 10^{-5} \cdot N]$$

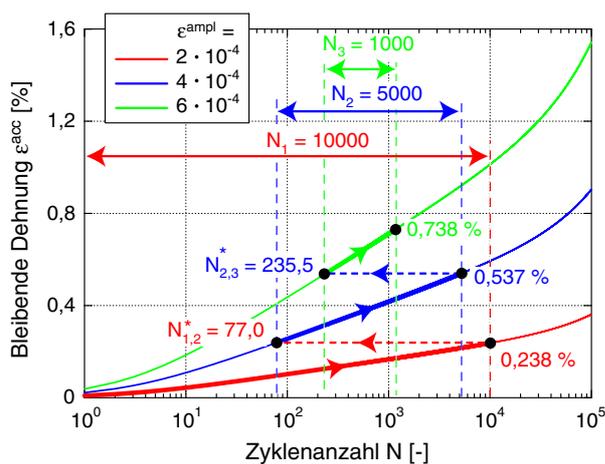


Bild 6: Handrechnung des Beispiels mit den Gleichungen des Akkumulationsmodells analog zu Stewart [16]

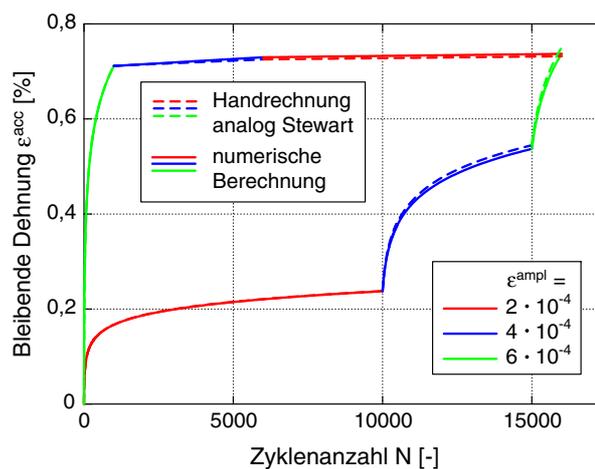


Bild 7: Rechnung des Beispiels in Tabelle 7 mit dem Akkumulationsmodell

Die bleibenden Dehnungen $\varepsilon_1^{\text{acc}}$, $\varepsilon_2^{\text{acc}}$ und $\varepsilon_3^{\text{acc}}$ nach den Zykluspaketen 1, 2 und 3 ergeben sich

entsprechend dem folgenden Rechenweg:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1^{\text{acc}} &= 2,81 \cdot 10^{-4} [\ln(1 + 0,37 \cdot 10000) + 2,36 \cdot 10^{-5} \cdot 10000] = 0,238 \% \\
0,238 \% &= 7,02 \cdot 10^{-4} [\ln(1 + 0,37 \cdot N_{1,2}^*) + 2,36 \cdot 10^{-5} \cdot N_{1,2}^*] \quad \rightarrow N_{1,2}^* = 77,0 \\
\varepsilon_2^{\text{acc}} &= 7,02 \cdot 10^{-4} [\ln(1 + 0,37 \cdot (N_{1,2}^* + N_2)) + 2,36 \cdot 10^{-5} \cdot (N_{1,2}^* + N_2)] \\
&= 7,02 \cdot 10^{-4} [\ln(1 + 0,37 \cdot (77,0 + 5000)) + 2,36 \cdot 10^{-5} \cdot (77,0 + 5000)] = 0,537 \% \\
0,537 \% &= 11,89 \cdot 10^{-4} [\ln(1 + 0,37 \cdot N_{2,3}^*) + 2,36 \cdot 10^{-5} \cdot N_{2,3}^*] \quad \rightarrow N_{2,3}^* = 235,5 \\
\varepsilon_3^{\text{acc}} &= 11,98 \cdot 10^{-4} [\ln(1 + 0,37 \cdot (N_{2,3}^* + N_3)) + 2,36 \cdot 10^{-5} \cdot (N_{2,3}^* + N_3)] \\
&= 11,98 \cdot 10^{-4} [\ln(1 + 0,37 \cdot (235,5 + 1000)) + 2,36 \cdot 10^{-5} \cdot (235,5 + 1000)] = 0,738 \%
\end{aligned}$$

Eine Berechnung mit absteigender Amplitude läuft analog und liefert $\varepsilon_1^{\text{acc}} = 0,712 \%$, $\varepsilon_2^{\text{acc}} = 0,730 \%$ und $\varepsilon_3^{\text{acc}} = 0,737 \%$. Die bleibende Dehnung am Ende des dritten Zykluspaketes ist bei aufsteigender und absteigender Reihenfolge der Amplituden also in etwa identisch.

Entsprechend dieser Vorgehensweise kann man die bleibende Dehnung auch für beliebige Zyklusanzahlen innerhalb der Pakete berechnen. Die als durchgezogenen Kurven in Bild 7 eingetragenen Akkumulationsverläufe $\varepsilon^{\text{acc}}(N)$ für die aufsteigende und die absteigende Amplitudenreihenfolge wurden auf diese Weise erzeugt.

Die in Bild 7 gestrichelt eingetragenen Verläufe $\varepsilon^{\text{acc}}(N)$ wurden aus einer numerischen Berechnung des gleichen Beispiels mit dem Akkumulationsmodell gewonnen. Der geringe Unterschied der durchgezogenen und gestrichelten Kurven in Bild 7 demonstriert, dass die Gleichungen des Akkumulationsmodells in etwa das Konzept von Stewart [16] umsetzen.

5.4 Handrechnung mit exakten Gleichungen des Akkumulationsmodells

Die im letzten Abschnitt erläuterte Handrechnung nach Stewart [16] gibt die mit dem Akkumulationsmodell prognostizierte bleibende Dehnung nur näherungsweise wieder. Im Folgenden werden die exakten Gleichungen für eine Handrechnung von Zykluspaketen präsentiert. Es sind zwei Rechenwege möglich, wobei für jedes Paket entweder die zyklische Vorbelastungsvariable g_i^A oder eine äquivalente Zyklusanzahl $N_{i-1,i}^*$ berechnet werden muss.

Zunächst soll die Rechnung mit Hilfe der zyklischen Vorbelastungsvariable g^A beschrieben werden. Die zyklische Vorbelastung g_i^A am Ende des Paketes i kann folgendermaßen mit der zyklischen Vorbelastung g_{i-1}^A zu Beginn des Paketes, der Amplitudenfunktion $f_{\text{ampl},i}$ und der Zyklusanzahl N_i des Paketes berechnet werden:

$$g_i^A = f_{\text{ampl},i} C_{N1} \ln \left[\exp \left(\frac{g_{i-1}^A}{C_{N1} f_{\text{ampl},i}} \right) + C_{N2} N_i \right] \quad (35)$$

Der Zuwachs der bleibenden Dehnung infolge des Zykluspaketes i ergibt sich aus:

$$\Delta\varepsilon_i^{\text{acc}} = f_e f_p f_Y \left\{ g_i^A - g_{i-1}^A + \frac{C_{N1} C_{N3}}{C_{N2}} f_{\text{ampl},i} \left[\exp\left(\frac{g_i^A}{f_{\text{ampl},i} C_{N1}}\right) - \exp\left(\frac{g_{i-1}^A}{f_{\text{ampl},i} C_{N1}}\right) \right] \right\} \quad (36)$$

und die bleibende Dehnung schließlich zu:

$$\varepsilon_i^{\text{acc}} = \varepsilon_{i-1}^{\text{acc}} + \Delta\varepsilon_i^{\text{acc}} \quad (37)$$

Für das Beispiel aus Abschnitt 5.3 und eine aufsteigende Amplitudenreihenfolge erhält man $g_1^A = 0,006216$, $g_2^A = 0,01423$, $g_3^A = 0,01972$, $\Delta\varepsilon_1^{\text{acc}} = 0,238 \%$, $\Delta\varepsilon_2^{\text{acc}} = 0,306 \%$, $\Delta\varepsilon_3^{\text{acc}} = 0,207 \%$ und damit $\varepsilon_1^{\text{acc}} = 0,238 \%$, $\varepsilon_2^{\text{acc}} = 0,544 \%$ und $\varepsilon_3^{\text{acc}} = 0,750 \%$. Diese bleibenden Dehnungen stimmen mit den numerisch berechneten Werten (Bild 7) überein. Eine Rechnung mit absteigender Amplitude ergibt $\varepsilon_3^{\text{acc}} = 0,732 \%$, d.h. die Miner-Regel ist hier ebenfalls nur näherungsweise erfüllt.

Alternativ kann die Berechnung auch mit Hilfe der äquivalenten Zylenanzahl $N_{i-1,i}^*$ durchgeführt werden. Die äquivalente Zylenanzahl wird hier wie folgt eingeführt (vergleiche Gleichung (30)):

$$g_i^A = f_{\text{ampl},i} C_{N1} \ln [1 + C_{N2}(N_i + N_{i-1,i}^*)] \quad (38)$$

wobei sich die äquivalente Zylenanzahl hier - anders als im Abschnitt 5.3 - nur auf den N -abhängigen Anteil der Akkumulationsrate bezieht. Dies führt zu den Unterschieden zur Vorgehensweise nach Stewart [16].

Die äquivalente Zylenanzahl am Ende des Paketes $i-1$, bezogen auf die Amplitude des nächsten Paketes i lautet:

$$N_{i-1,i}^* = \frac{1}{C_{N2}} \left\{ [1 + C_{N2}(N_{i-1} + N_{i-2,i-1}^*)]^{f_{\text{ampl},i-1}/f_{\text{ampl},i}} - 1 \right\} \quad (39)$$

Damit gilt für den Zuwachs an bleibender Dehnung:

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon_i^{\text{acc}} = f_e f_p f_Y C_{N1} \{ & -f_{\text{ampl},i-1} \ln[1 + C_{N2}(N_{i-1} + N_{i-2,i-1}^*)] \\ & + f_{\text{ampl},i} [\ln[1 + C_{N2}(N_i + N_{i-1,i}^*)] + C_{N3} N_i] \} \end{aligned} \quad (40)$$

bzw. für die Gesamtdehnung:

$$\varepsilon_i^{\text{acc}} = f_e f_p f_Y C_{N1} \left[\left(\sum_{1}^i f_{\text{ampl},i} C_{N3} N_i \right) + f_{\text{ampl},i} \ln (1 + C_{N2} (N_i + N_{i-1,i}^*)) \right] \quad (41)$$

Für das Beispiel mit aufsteigender Amplitudenreihenfolge ergeben sich $N_{1,2}^* = 70,0$, $N_{2,3}^* = 220,4$ und damit die gleichen Dehnungen $\varepsilon_1^{\text{acc}} = 0,238 \%$, $\varepsilon_2^{\text{acc}} = 0,544 \%$ und $\varepsilon_3^{\text{acc}} = 0,750 \%$ wie in der Rechnung mit Hilfe der Variable g^A .

5.5 Nachrechnung von Triaxialversuchen mit Zyklenspaketen

Die zyklischen Triaxialversuche von Wichtmann et al. [20] bestätigen - ähnlich wie die Versuche von Stewart [16] und Kaggwa et al. [6] für deutlich kleinere Zyklensanzahlen - näherungsweise die Gültigkeit der Miner'schen Regel, zumindest für konstante mittlere Spannungen und für eine gleichbleibende Polarisierung der Zyklen. Unabhängig von der Reihenfolge der Amplituden wird ein ähnlicher Endwert der bleibenden Verformung erreicht (Bild 8). Rechnet man die Versuche mit den Parametern des Akkumulationsmodells für den verwendeten Mittelsand nach, so ergibt sich eine recht gute Übereinstimmung der prognostizierten Verläufe $\varepsilon^{\text{acc}}(N)$ mit den Messwerten (Bild 8).

Da das Akkumulationsmodell näherungsweise den Ansatz von Stewart [16] abbildet (Abschnitt 5.3), kann aus Bild 8 weiterhin geschlossen werden, dass die Vorgehensweise nach Stewart [16] auch für größere Zyklensanzahlen zu einer in etwa zutreffenden Abschätzung der tatsächlich auftretenden Akkumulationsraten führt. Dieser Ansatz kann daher auch für vereinfachte Berechnungen mit Hilfe von Gleichungen ähnlich (1) oder (19) angewendet werden.

6 Zur Miner-Regel für sich ändernde mittlere Spannungen

Bisher wurden in diesem Beitrag nur Zyklenspakete mit konstanten mittleren Spannungen betrachtet. Im Folgenden wird die Auswirkung von Änderungen der mittleren Spannung auf der Basis numerischer Simulationen von Triaxialversuchen mit dem Akkumulationsmodell überprüft. In den im Bild 9a dargestellten Rechnungen wurde der mittlere Druck p^{av} von Paket zu Paket verändert, während das Spannungsverhältnis $\eta^{\text{av}} = 0,75$ konstant gehalten wurde. Die Berechnungen im Bild 9b wurden mit $p^{\text{av}} = 200 \text{ kPa} = \text{konstant}$ und einem von Paket zu Paket veränderten mittleren Spannungsverhältnis durchgeführt. Jedes Paket umfasste 50000 Zyklen. Die Dehnungsamplitude $\varepsilon^{\text{ampl}} = 4 \cdot 10^{-4}$ und die Porenzahl wurden in den Berechnungen konstant gehalten.

Offensichtlich ist die bleibende Verformung am Versuchsende nicht unabhängig von der Reihenfolge der Pakete, d.h. die Miner'sche Regel scheint für sich ändernde mittlere Spannungen nicht zu gelten. Zwar handelt es sich hierbei zunächst nur um numerische Prognosen, jedoch bestätigen erste Versuche am IBF das in Bild 9 dargestellte Akkumulationsverhalten. Weitere Versuchsreihen hierzu werden folgen.

Werden die Langzeitverformungen von Gründungen auf Basis von Triaxialversuchen abgeschätzt, in denen der Zeldruck konstant gehalten wird und die Deviatorspannung zwischen $q^{\text{min}} = 0$ und

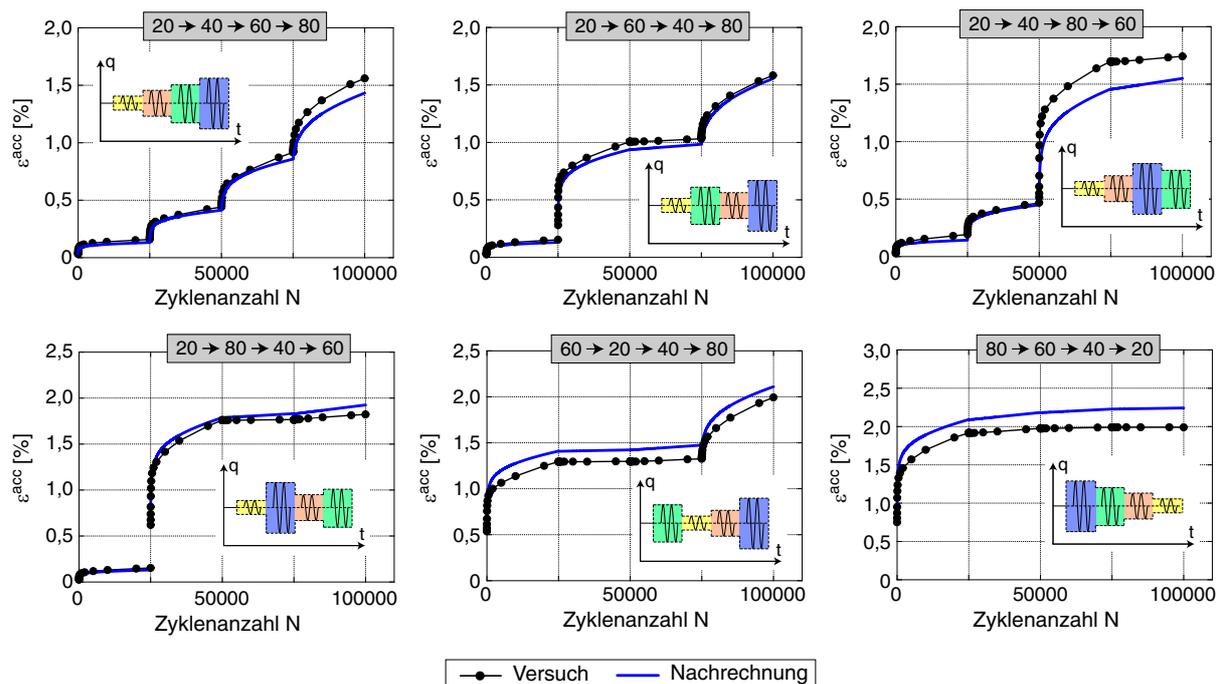


Bild 8: Akkumulation von Verformungen in zyklischen Triaxialversuchen mit Zyklenspaketen mit unterschiedlichen Amplituden: Vergleich von Experiment und Nachrechnung mit dem Akkumulationsmodell (Wichtmann et al. [20])

einem Maximalwert q^{\max} oszilliert (z.B. Taşan et al. [17]), so bedeutet eine Änderung der Amplitude auch immer eine Änderung der mittleren Spannung, insbesondere des Spannungsverhältnisses η^{av} . Gemäß Bild 9 könnte es in diesem Fall zu größeren Abweichungen von der Miner-Regel kommen (abgesehen von der Änderung der Akkumulationsrichtung, d.h. des Verhältnisses aus akkumulierter Scher- und Volumenverformung, Wichtmann [18]).

Dennoch wird die Gültigkeit der Miner-Regel für die Systemebene zumeist vorausgesetzt. Leblanc et al. [8] konnten die Miner-Regel in zwei Modellversuchen an relativ kleinen, steifen Pfählen bestätigen, allerdings nur für sehr geringe Zyklenzahlen ($N = 300$ pro Paket). Hierzu sind sicherlich noch weitere Untersuchungen auf Element- und Systemebene notwendig.

7 Logarithmus- vs. Potenzansatz

In der Literatur wird die Entwicklung der bleibenden Dehnung bzw. Verschiebung mit der Anzahl der Zyklen entweder durch eine Logarithmusfunktion (siehe Gleichung (1), u.a. Hettler [5], Stewart [16], Lin und Liao [10]) oder einen Potenzansatz (siehe Gleichung (19), u.a. Leblanc et al. [9, 8], Taşan et al. [17]) beschrieben. Oftmals wird die jeweils andere Funktion von den Autoren als unpassend für die eigenen Versuchsergebnisse eingestuft. Dies kann evtl. auf die

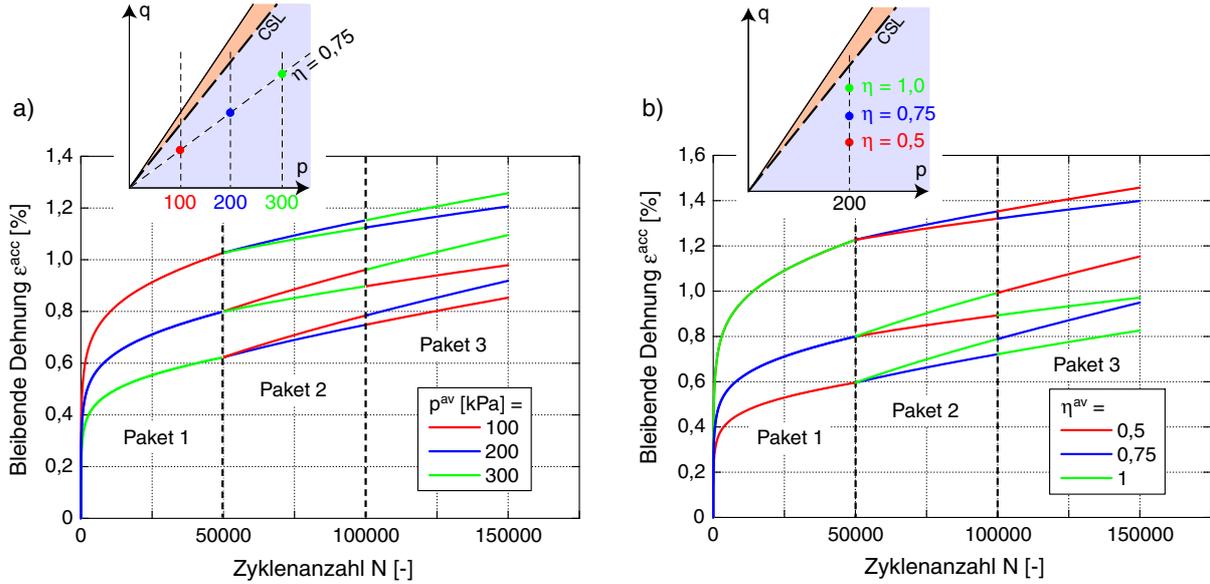


Bild 9: Numerische Berechnung von Triaxialversuchen mit dem Akkumulationsmodell, in denen die mittlere Spannung von Paket zu Paket verändert wurde. Die Dehnungsamplitude $\varepsilon^{ampl} = 4 \cdot 10^{-4}$ und die Lagerungsdichte $I_{D0} = 0,6$ ($e = 0,828$) wurden als konstant angenommen.

verwendeten Testmaterialien zurückgeführt werden.

Die von Wichtmann et al. [22] dokumentierten Triaxialversuche zeigen, dass der Verlauf der Akkumulationskurven von der Korngrößenverteilungskurve des getesteten Materials abhängt. Für einen enggestuften Feinkies ($d_{50} = 3,5$ mm, $C_u = 1,5$) verläuft die Akkumulation auch für größere Zyklenanzahlen proportional zum Logarithmus der Zyklenanzahl (Bild 10a). Die Kurven werden durch eine Logarithmusfunktion der Form

$$\varepsilon^{acc} = C_{N1} \ln(1 + N) \quad (\text{rote Kurve in Bild 10}) \quad (42)$$

gut beschrieben, durch einen Potenzansatz der Form

$$\varepsilon^{acc} = C_{N1} N^{C_{N2}} \quad (\text{grüne Kurve in Bild 10}) \quad (43)$$

weniger zufriedenstellend. Bei enggestuften Fein- und Mittelsanden sehen die Akkumulationskurven i.d.R. ähnlich aus wie im Bild 10b (gemessen an einem Sand mit $d_{50} = 0,6$ mm, $C_u = 1,5$). Die Logarithmusfunktion liefert nur bis ca. $N = 10000$ eine zufriedenstellende Approximation, für größere Zyklenanzahlen unterschätzt sie die Akkumulation. Der Potenzansatz passt für Zyklenanzahlen zwischen $N = 100$ und $N = 10^5$ recht gut, für kleinere Zyklenanzahlen $N < 100$ wird die Akkumulation jedoch überschätzt. Für ungleichförmige Böden verlaufen die Akkumulationskurven in der halblogarithmischen Darstellung gekrümmt (Bild 10c, für $d_{50} = 0,6$ mm,

$C_u = 8$). Die Logarithmusfunktion ist hier ungeeignet, der Potenzansatz liefert eine recht gute Übereinstimmung.

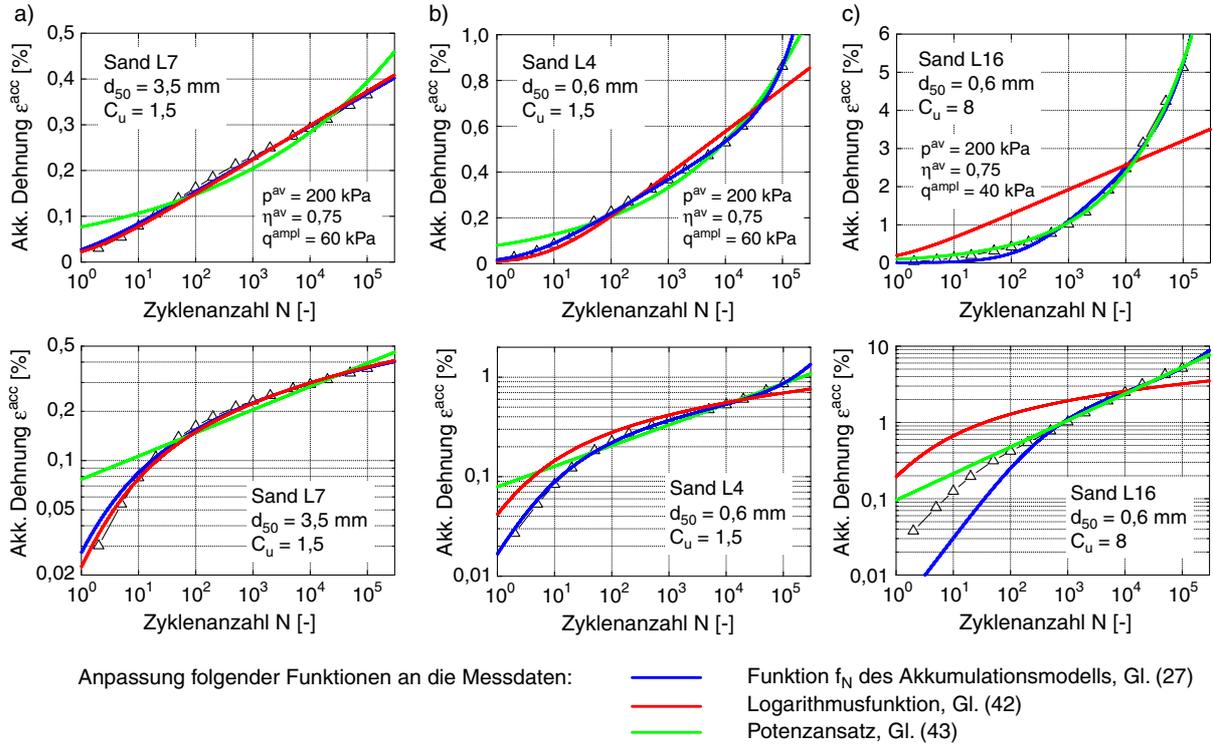


Bild 10: Akkumulationskurven, die in zyklischen Triaxialversuchen an Quarzsanden mit unterschiedlicher Korngrößenverteilungskurve gemessen wurden, oben in halb- und unten in doppelt-logarithmischer Darstellung.

Die in Gleichung (27) definierte Funktion f_N des Akkumulationsmodells ist flexibel genug, um die gemessenen Akkumulationskurven unabhängig vom Testmaterial zufriedenstellend zu beschreiben (blaue Kurven in Bild 10). Nach Meinung der Autoren sind ähnlich flexible Funktionen auch für die Beschreibung der Verformungsakkumulation auf Systemebene notwendig.

Für ein Akkumulationsmodell ähnlich Abschnitt 5.3 ist ein Potenzansatz ungünstig, da die Rate

$$\dot{\varepsilon}^{\text{acc}} = C_{N1} C_{N2} N^{C_{N2}-1} \quad (44)$$

für $N = 0$ und übliche Werte von $C_{N2} \ll 1$ gegen unendlich strebt.

8 Ausblick

Wie bei allen Rechenmodellen, die für die Abschätzung der Langzeitverformungen von OWEA-Gründungen vorgeschlagen wurden, steht eine Überprüfung an großmaßstäblichen Modellversuchen und in-situ-Messungen auch für die FE-Prognosen mit dem Akkumulationsmodell aus.

Nachrechnungen von kleinmaßstäblichen 1g-Modellversuchen (Kudella und Solf [7], Zachert und Wienbroer [23]) im Prototypmaßstab sind nur bedingt geeignet, da die Skalierbarkeit vom Modell- auf den Prototypmaßstab für zyklische Belastungen angezweifelt werden darf. Nachrechnungen im Modellmaßstab sind jedoch aufgrund der sehr kleinen Spannungsniveaus ebenfalls schwierig, da die verwendeten Stoffgesetze nicht für diesen Spannungsbereich entwickelt wurden und dieser Spannungsbereich in Elementversuchen auch nur mit Schwierigkeiten getestet werden kann. Eine Überprüfung der Prognosen des Akkumulationsmodells für Flachgründungen soll anhand der Messungen an dem im Maßstab 1:1 abgebildeten Züblin-Testfundament (Hartwig [4]) erfolgen.

Im Hinblick auf Belastungen mit veränderlicher Amplitude werden die experimentellen Untersuchungen zur Gültigkeit der Miner-Regel für Zyklenpakete mit veränderter mittlerer Spannung fortgesetzt. Weitere Versuchsreihen, in denen neben der Amplitude auch die Richtung der Zyklen mehrfach wechselt, werden folgen.

Auf der Basis von Laborversuchen an Sanden mit unterschiedlicher Kornbeschaffenheit (Kornform, Oberflächenrauigkeit, Mineralogie) werden die in der Tabelle 5 angegebenen Korrelationen für eine vereinfachte Abschätzung der Parameter des Akkumulationsmodells erweitert. Die Versuche werden auch Erkenntnisse dazu liefern, inwiefern die im Abschnitt 7 diskutierte Form der Akkumulationskurven neben der Korngrößenverteilungskurve auch von der Kornbeschaffenheit abhängt.

Danksagung

Die Autoren danken dem Bundesministerium für Umwelt, Naturschutz und Reaktorsicherheit (BMU) für die finanzielle Förderung im Rahmen des Verbundprojektes 0327618 "Geotechnische Robustheit und Selbstheilung bei der Gründung von Offshore-Windenergieanlagen".

Literatur

- [1] M. Achmus, Y.-S. Kuo, and A. Abdel-Rahman. Zur Bemessung von Monopiles für zyklische Lasten. *Der Bauingenieur*, 83:303–311, 2008.
- [2] DGGT. Empfehlungen des Arbeitskreises "Pfaehle" der Deutschen Gesellschaft für Geotechnik e.V. (Entwurf). , 2011.
- [3] J. Dührkop. Zyklisch horizontal belastete Offshore-Monopiles. In *Workshop "Gründung von Offshore-Windenergieanlagen", Karlsruhe 2010, Veröffentlichungen des Institutes für*

- Bodenmechanik und Felsmechanik am Karlsruher Institut für Technologie (KIT), Heft Nr. 172*, pages 209–223, 2010.
- [4] U. Hartwig. Planung der versuchstechnischen Simulation des Verhaltens einer Flachgründung für Offshore-Windenergieanlagen im Originalmaßstab. In *Workshop "Gründung von Offshore-Windenergieanlagen"*, Karlsruhe 2010, *Veröffentlichungen des Institutes für Bodenmechanik und Felsmechanik am Karlsruher Institut für Technologie (KIT), Heft Nr. 172*, pages 81–97, 2010.
- [5] A. Hettler. Verschiebungen starrer und elastischer Gründungskörper in Sand bei monotoner und zyklischer Belastung. Institut für Boden- und Felsmechanik der Universität Karlsruhe, Heft Nr. 90, 1981.
- [6] W.S. Kaggwa, J.R. Booker, and J.P. Carter. Residual strains in calcareous sand due to irregular cyclic loading. *Journal of Geotechnical Engineering, ASCE*, 117(2):201–218, 1991.
- [7] P. Kudella and O. Solf. Untersuchungen zur Verformungsakkumulation bei zyklischer horizontal beanspruchten Offshore-Monopiles. In *Workshop "Gründungen von Offshore-Windenergieanlagen" am 22. und 23. März 2011 in Berlin. Veröffentlichungen des Grundbauinstitutes der Technischen Universität Berlin, Heft Nr. 56*, 2011.
- [8] C. Leblanc, B.W. Byrne, and G.T. Houlsby. Response of stiff piles in sand to random two-way lateral loading. *Géotechnique*, 60(2):79–90, 2010.
- [9] C. Leblanc, G.T. Houlsby, and B.W. Byrne. Response of stiff piles in sand to long-term cyclic lateral loading. *Géotechnique*, 60(2):79–90, 2010.
- [10] S.-S. Lin and J.-C. Liao. Permanent Strains of Piles in Sand due to Cyclic Lateral Loads. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE*, 125(9):798–802, 1999.
- [11] M. Miner. Cumulative damage in fatigue. *Transactions of the American Society of Mechanical Engineering*, 67:A159–A164, 1945.
- [12] C.L. Monismith. "Rutting prediction in asphalt concrete pavements". *Transportation Research Record*, 616:2–8, 1976.
- [13] C.L. Monismith, N. Ogawa, and C.R. Freeme. Permanent deformation characteristics of subgrade soils due to repeated loading. *Transportation Research Record*, 537:1–17, 1975.
- [14] A. Niemunis, T. Wichtmann, and T. Triantafyllidis. A high-cycle accumulation model for sand. *Computers and Geotechnics*, 32(4):245–263, 2005.

-
- [15] I. Rycklik. A new definition of the rainflow cycle counting method. *Int. J. Fatigue*, 9(2):119–121, 1987.
- [16] H.E. Stewart. Permanent strains from cyclic variable-amplitude loadings. *Journal of Geotechnical Engineering, ASCE*, 112(6):646–660, 1986.
- [17] H.E. Taşan, F. Rackwitz, and R. Glasenapp. Ein Bemessungsmodell für Monopilegründungen unter zyklischen Horizontallasten. *Bautechnik*, 88(5):301–318, 2011.
- [18] T. Wichtmann. Explicit accumulation model for non-cohesive soils under cyclic loading. PhD thesis, Publications of the Institute of Soil Mechanics and Foundation Engineering, Ruhr-University Bochum, Issue No. 38, available from www.rz.uni-karlsruhe.de/~gn97/, 2005.
- [19] T. Wichtmann, A. Niemunis, and T. Triantafyllidis. On the determination of a set of material constants for a high-cycle accumulation model for non-cohesive soils. *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, 34(4):409–440, 2010.
- [20] T. Wichtmann, A. Niemunis, and Th. Triantafyllidis. Gilt die Miner’sche Regel für Sand? *Bautechnik*, 83(5):341–350, 2006.
- [21] T. Wichtmann, A. Niemunis, and Th. Triantafyllidis. Recent improvements of a high-cycle accumulation model for sand. In *Workshop "Gründung von Offshore-Windenergieanlagen", Karlsruhe 2010, Veröffentlichungen des Institutes für Bodenmechanik und Felsmechanik am Karlsruher Institut für Technologie (KIT), Heft Nr. 172*, pages 35–47, 2010.
- [22] T. Wichtmann, A. Niemunis, and Th. Triantafyllidis. Simplified calibration procedure for a high-cycle accumulation model based on cyclic triaxial tests on 22 sands. In *International Symposium: Frontiers in Offshore Geotechnics, Perth, Australia*, 2010.
- [23] H. Zachert and H. Wienbroer. Verformungsakkumulation eines Flachgründungsmodells infolge zyklischer Belastung. In *Workshop "Gründungen von Offshore-Windenergieanlagen" am 22. und 23. März 2011 in Berlin. Veröffentlichungen des Grundbauinstitutes der Technischen Universität Berlin, Heft Nr. 56*, 2011.