

Torsten Wichtmann  
 Andrzej Niemunis  
 Theodor Triantafyllidis

## Gilt die Miner'sche Regel für Sand?

Belastungen mit variierender Amplitude werden in Berechnungen mit einem expliziten (hochzyklischen) Akkumulationsmodell vereinfacht durch Zyklenpakete mit jeweils konstanter Amplitude ersetzt. Diese Paketierung nach dem Kriterium der Amplitude setzt voraus, dass die Reihenfolge hinsichtlich des Endwertes der bleibenden Verformung von untergeordneter Bedeutung ist, d.h. dass die sog. Miner'sche Regel für Sand gilt. Leider liegen hierzu nur wenige experimentelle Studien mit einer geringen Zyklenanzahl vor. Dieser Beitrag präsentiert die Ergebnisse von Triaxialversuchen mit Zyklenpaketen, in denen die Gültigkeit der Miner'schen Regel für Sand bei größeren Zyklenanzahlen ( $N \geq 10^5$ ) überprüft wurde. Es zeigt sich, dass der Einfluss der Reihenfolge der Pakete (zumindest bei Zyklen mit konstanter Polarisation) vernachlässigt werden kann, d.h. die Vorgehensweise expliziter Modelle legitim ist.

### Is Miner's rule applicable to sand?

In calculations with an explicit (high-cycle) accumulation model a loading with varying amplitudes is replaced by packages of cycles each with a constant amplitude. This assembling of packages according to the criteria of amplitude is based on the assumption, that the sequence of the packages is of minor importance with respect to the final value of the residual deformation, i.e. that the Miner's rule is applicable to sand. Unfortunately, only few experimental studies with a low number of cycles exist. This paper presents the results of triaxial tests with packages of cycles in which the validity of the Miner's rule was checked for sand and larger numbers of cycles ( $N \geq 10^5$ ). It is shown that the influence of the sequence of the packages can be neglected (at least for cycles with a constant polarisation), i.e. that the procedure of explicit models is legitimate.

### 1 Einleitung

Bei vielen zyklischen Belastungen von Gründungselementen ist die Amplitude nicht konstant, sondern variiert von Zyklus zu Zyklus. Im Verkehrswegebau schwanken die Amplituden aufgrund des unterschiedlichen Gewichts der Fahrzeuge. Auch Wind und Wellen verursachen unregelmäßige zyklische Belastungen von Gründungen.

Für FE-Prognosen der bleibenden Verformungen bzw. Spannungsänderungen im Boden infolge einer zyklischen Belastung mit einer großen Anzahl von Lastspielen ( $N > 10^3$ , sog. hoch- oder polyzyklische Bela-

stung) und kleinen Dehnungsamplituden ( $\varepsilon^{\text{ampl}} < 10^{-3}$ ) wurden explizite Akkumulationsmodelle entwickelt (u.a. [1-6]). Diese behandeln die Akkumulation der Dehnung unter zyklischer Belastung analog zum Problem des Kriechens unter konstanten Lasten, wobei die Zeit durch die Anzahl  $N$  der Zyklen ersetzt wird. Ein wesentlicher Einflussparameter expliziter Modelle ist die Dehnungsamplitude (manche Modelle verwenden auch die Spannungsamplitude). In einer FE-Berechnung wird zunächst das Feld der Dehnungsamplitude aus einer impliziten Berechnung eines Zyklus (d.h. einer Berechnung mit einem  $\dot{\sigma}$ - $\dot{\varepsilon}$ -Stoffmodell und vielen Dehnungsincrementen) gewonnen. Während der folgenden expliziten Berechnung wird die Dehnungsamplitude als konstant angenommen, bis ihr Feld in einem implizit berechneten Kontrollzyklus aktualisiert wird.

Die Akkumulation bleibender Dehnungen im Boden verläuft mit zunehmender Spannungs- bzw. Dehnungsamplitude schneller. Anhand von Versuchen mit konstanter Amplitude (Bild 1, [7], [8]) konnte gezeigt werden, dass die Akkumulationsrate proportional zum Quadrat der Dehnungsamplitude ist, d.h. dass  $\varepsilon^{\text{acc}} \sim (\varepsilon^{\text{ampl}})^2$  gilt.

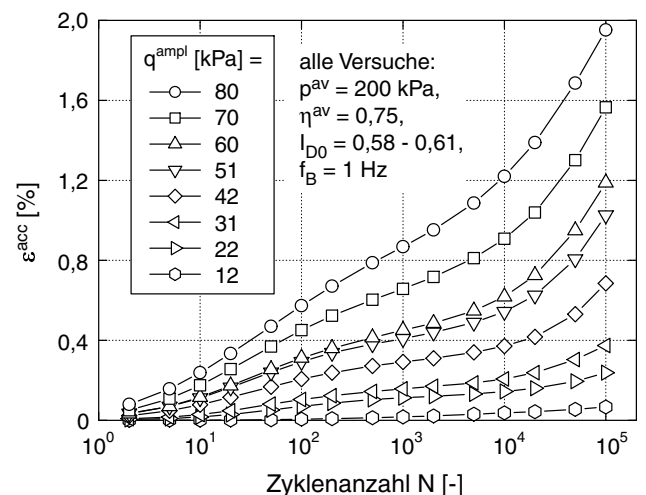


Bild 1: Zunahme der Akkumulationsrate  $\varepsilon^{\text{acc}}$  mit der Spannungsamplitude  $q^{\text{ampl}}$ , Ergebnisse zyklischer Triaxialversuche mit konstanter Amplitude [8]

Belastungen mit variierender Amplitude werden in einer expliziten Berechnung der Akkumulation mit Hilfe von stochastischen Methoden durch Zyklenpakete mit jeweils konstanter Amplitude ersetzt (Bild 2). Diese Vor-

gehensweise setzt die Gültigkeit der Miner'schen Regel voraus, d.h. die Annahme, dass die Reihenfolge der Zyklenpakete den Endwert der bleibenden Verformung nicht beeinflusst. Während die explizite Berechnung mit Zyklenpaketen den Endwert der bleibenden Verformung liefert, ist der zeitliche Verlauf in dieser Berechnung natürlich ein anderer als in situ.

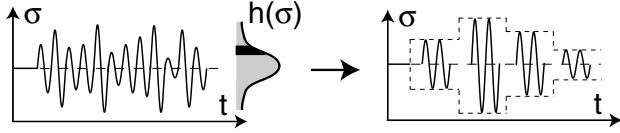


Bild 2: Ersatz einer unregelmäßigen zyklischen Belastung durch Zyklenpakete

Die Annahme der Miner'schen Regel bedarf einer experimentellen Verifikation. Da in der Literatur (siehe Überblick im Abschnitt 2) kaum Studien zum Einfluss der Reihenfolge von Zyklenpaketen auf die Akkumulation im Boden zu finden sind, wurden eigene zyklische Triaxialversuche durchgeführt. Deren Ergebnisse werden im Abschnitt 4 dokumentiert. In erster Näherung können demnach Effekte der Reihenfolge auf den Endwert der bleibenden Dehnung vernachlässigt werden.

## 2 Literaturüberblick

In der Ermüdungsmechanik ist für metallische Werkstoffe unter Wechselbelastungen mit variierender Amplituden die Miner'sche Regel [9] bekannt. Ist  $N_{fi}$  die Zyklenanzahl, bei der unter einer konstanten Amplitude  $\sigma_i^{\text{ampl}}$  ein Werkstoffversagen eintritt, dann ist ein Versagen bei einer Belastung mit unterschiedlichen Amplituden bei

$$\sum_{i=1}^n \frac{N_i}{N_{fi}} = 1 \quad (1)$$

zu erwarten, worin  $N_i$  die aufgebrauchte Zyklenanzahl mit der Amplitude  $\sigma_i^{\text{ampl}}$  ist. Die Reihenfolge der Aufbringung der Zyklenpakete spielt demnach hinsichtlich des Versagenszeitpunktes keine Rolle.

Auch die Spannungsamplituden während eines Erdbebens variieren stark mit der Zeit. Unregelmäßige zyklische Belastungen wurden z.B. von Ishihara & Yasuda [10] und Tatsuoka et al. [11] auf Sandproben aufgebracht. Zur Beurteilung einer Verflüssigungsgefährdung wird die unregelmäßige Einwirkung oft vereinfachend durch äquivalente, regelmäßige Zyklen mit einer konstanten Amplitude ersetzt (Seed et al. [12, 13]). Äquivalent bedeutet hier, dass die unregelmäßige und die regelmäßige Belastung zum gleichen Aufbau von Porenwasserüberdruck führen. Die konstante Amplitude der regelmäßigen Belastung wird als ein bestimmter Bruchteil (zumeist 65 %) der maximalen Amplitude der unregelmäßigen Belastung gewählt.

Nur sehr wenige Ergebnisse von Elementversuchen mit Zyklenpaketen (engl. "multistage cyclic loading") wurden bisher veröffentlicht. Kaggwa et al. [14] untersuchten die bleibenden Dehnungen in dränierten Triaxi-

alversuchen mit Zyklenpaketen an einem kalkhaltigen Sand. Bei konstanten mittleren Spannungen ( $p^{\text{av}} = 266,7 \text{ kPa}$ ,  $q^{\text{av}} = 200 \text{ kPa}$ ) wurden drei Zyklenpakete mit jeweils 50 Zyklen und den Amplituden  $q^{\text{ampl}} = 100, 150$  und  $200 \text{ kPa}$  in unterschiedlicher Reihenfolge aufgebracht. Die bleibenden Scher- und Volumendehnungen sind im Bild 3 dargestellt. Während der Verlauf der Dehnungen mit  $N$  von der Reihenfolge der Zyklenpakete abhängt, wurden die bleibenden Dehnungen am Ende des dritten Zyklenpaketes kaum von der Paketreihenfolge beeinflusst. Die in den Versuchen von Kaggwa et al. [14] aufgebrauchte Zyklenanzahl war jedoch gering und eine Übertragbarkeit der Ergebnisse auf polyzyklische Belastungen ist nicht klar. Daher wurden eigene Experimente mit größeren Zyklenanzahlen durchgeführt, welche im folgenden dokumentiert werden.

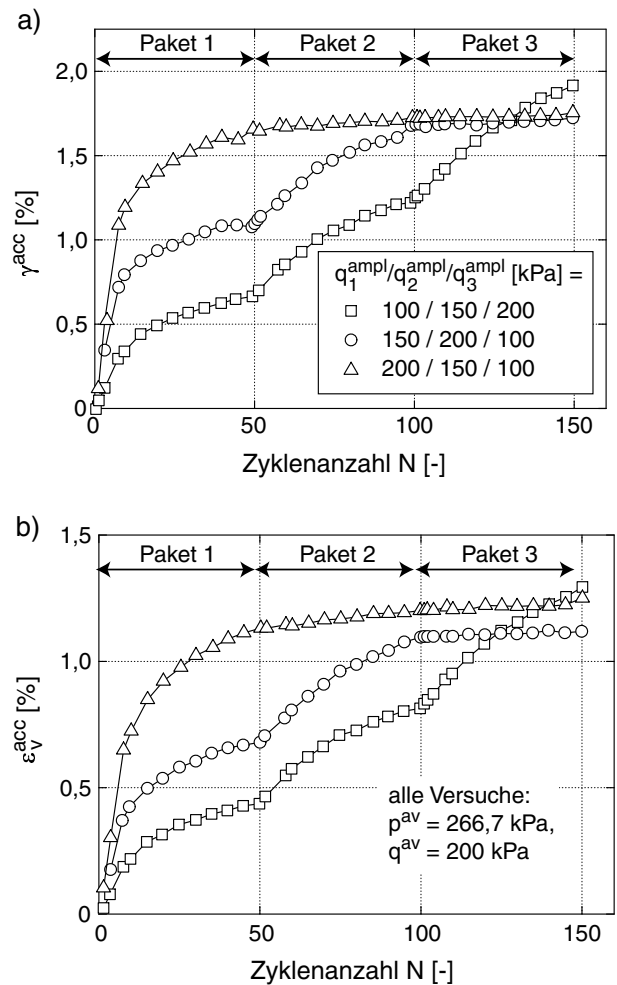


Bild 3: Bleibende a) Scher- und b) Volumendehnungen in Versuchen mit Zyklenpaketen nach Kaggwa et al. [14]

## 3 Eigene Experimente

Der Einfluss der Reihenfolge von Zyklenpaketen wurde in zyklischen Triaxialversuchen studiert. Ein Schema des Versuchsgerätes enthält das Bild 4. Eine ausführliche Beschreibung der Apparatur und der Probenpräparation kann in [8] nachgelesen werden.

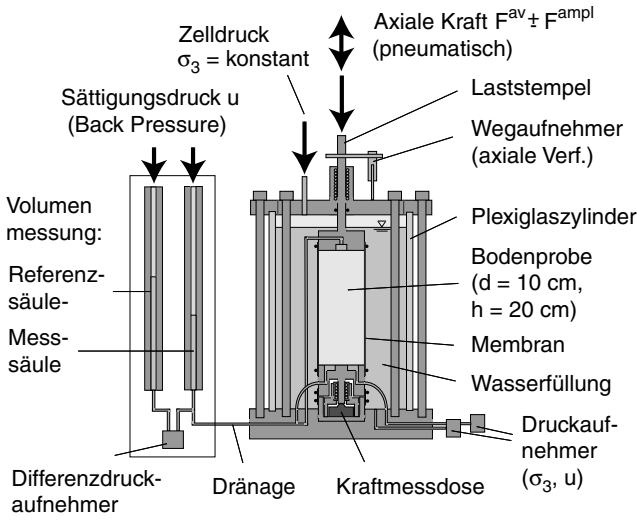


Bild 4: Schema des Triaxialgerätes

In den Versuchen wurde die seitliche effektive Spannung  $\sigma_3 = 150$  kPa konstant gehalten und die mittlere axiale effektive Spannung betrug  $\sigma_1^{av} = 300$  kPa (Bild 5). Das mittlere Spannungsverhältnis war demnach  $K_0 = \sigma_3/\sigma_1^{av} = 0,5$ . Im Bild 5 ist der Spannungszustand auch in der  $p$ - $q$ -Ebene dargestellt. Dabei sind  $p = (\sigma_1 + 2\sigma_3)/3$  der mittlere Druck und  $q = \sigma_1 - \sigma_3$  die Deviatorspannung. Der mittlere Spannungszustand kann auch durch  $p^{av} = 200$  kPa und das Verhältnis  $\eta^{av} = q^{av}/p^{av} = 0,75$  beschrieben werden. Es wurden Zyklenpakete mit unterschiedlichen Amplituden der axialen Spannung  $\sigma_1^{ampl}$  getestet.

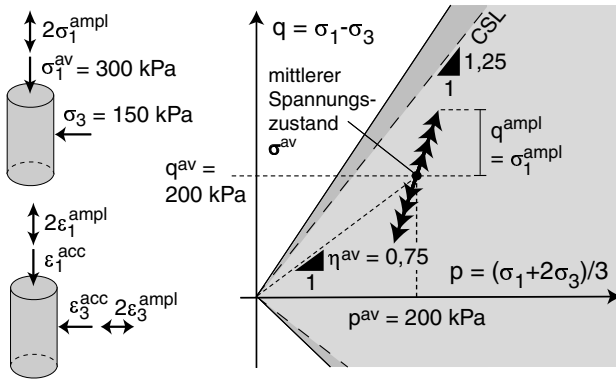


Bild 5: Spannung und Dehnung im zyklischen Triaxialversuch

Alle Proben wurden mit einer mitteldichten Anfangslagerung präpariert. Gemessen wurden die axiale Stauchung der Probe (mit einem Wegaufnehmer am Laststempel außerhalb der Druckzelle, siehe Bild 4) sowie deren Volumenänderung (über das Porenwasser der vollständig gesättigten Probe, Sättigungsdruck  $u = 200$  kPa). Hieraus konnten die axiale Dehnung  $\varepsilon_1$  sowie die Volumendehnung  $\varepsilon_v = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_3$  berechnet werden. Mit der aus  $\varepsilon_v$  ermittelten seitlichen Dehnung  $\varepsilon_3$  wurde die deviatorische Dehnung  $\varepsilon_q = \frac{2}{3}(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)$  bzw. die Scherdehnung  $\gamma = \varepsilon_1 - \varepsilon_3$  bestimmt. Die gesamte (totale)

Dehnung ist  $\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_1^2 + 2\varepsilon_3^2}$ . Unter zyklischer Belastung setzt sich die Dehnung aus einem bleibenden, akkumulierten Anteil ( $\varepsilon^{acc}$ ) und einer elastischen Komponente ( $\varepsilon^{ampl}$ ) zusammen (Bild 5).

In allen Versuchen wurde ein Mittel- bis Grobsand (mittlerer Korndurchmesser  $d_{50} = 0,55$  mm, Ungleichförmigkeitszahl  $U = d_{60}/d_{10} = 1,8$ ) verwendet, dessen Korngrößenverteilungskurve z.B. [7] oder [8] zu entnehmen ist.

#### 4 Versuchsergebnisse

In einer ersten Versuchsreihe wurden zwei Versuche mit jeweils zwei Zyklenpaketen durchgeführt. Jedes Paket umfasste  $10^5$  Zyklen. Die Reihenfolge der Amplituden  $q^{ampl} = 30$  kPa und  $60$  kPa wurde variiert. Die Belastungsfrequenz betrug  $f_B = 1$  Hz. Das Bild 6 zeigt die (nahezu linearen)  $q$ - $\varepsilon_1$ -Hystereseschleifen. Infolge der Zunahme der bleibenden Dehnung verschieben sich die Hysteresen mit zunehmender Zyklenanzahl nach rechts. Die Verformungen im ersten Zyklus des ersten Paketes sind sowohl im Versuch  $60 \rightarrow 30$  als auch im Versuch  $30 \rightarrow 60$  größer als in den weiteren Zyklen dieses Paketes. Der erste Zyklus des zweiten Paketes unterscheidet sich hingegen kaum von den weiteren Zyklen (obwohl die Amplitude im Versuch  $30 \rightarrow 60$  von Paket 1 zu Paket 2 erhöht wurde).

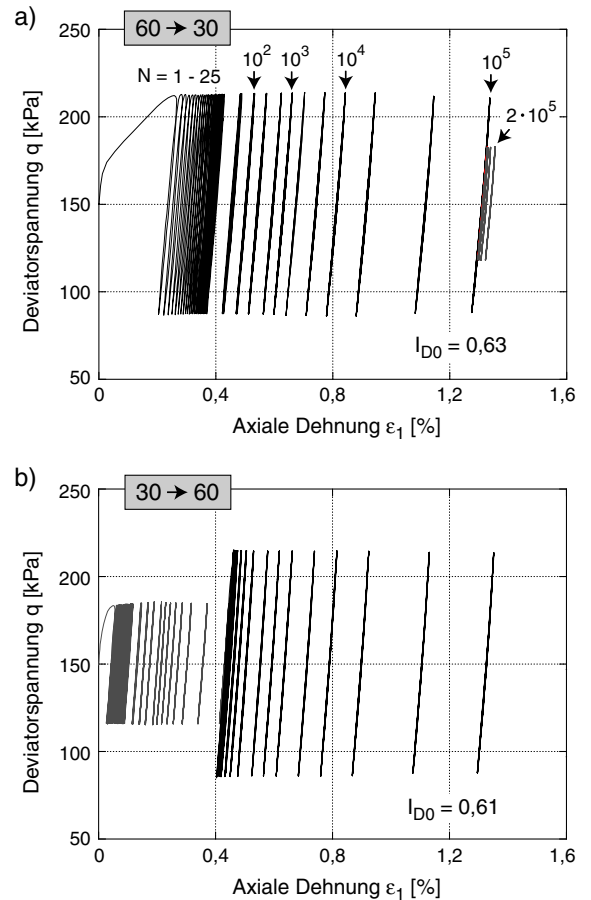


Bild 6:  $q$ - $\varepsilon_1$ -Hysteresen in zwei Versuchen mit den Amplituden  $q^{ampl} = 30$  und  $60$  kPa

Das Bild 7 stellt die Entwicklung der bleibenden totalen Dehnung  $\varepsilon^{\text{acc}}$  mit der Zyklanzahl  $N$  dar. Im Bild 7a enthält  $\varepsilon^{\text{acc}}$  auch die Dehnung in den ersten Zyklen der jeweiligen Pakete, während diese Dehnung im Bild 7b subtrahiert wurde. Die bleibenden Dehnungen am Ende des zweiten Zyklpaketes sind im Versuch 60  $\rightarrow$  30 minimal größer als im Versuch 30  $\rightarrow$  60 (Bild 7a). Allerdings ist die nach dem ersten Zyklus des ersten Paketes verbleibende Dehnung im Versuch 60  $\rightarrow$  30 wesentlich größer als im Versuch 30  $\rightarrow$  60. Dies führt zu einer dichteren Lagerung des Sandes am Ende des ersten Zyklus und aufgrund der Porenzahlabhängigkeit der Akkumulationsrate [8] zu geringeren bleibenden Dehnungen während der weiteren Zyklen (Bild 7b).

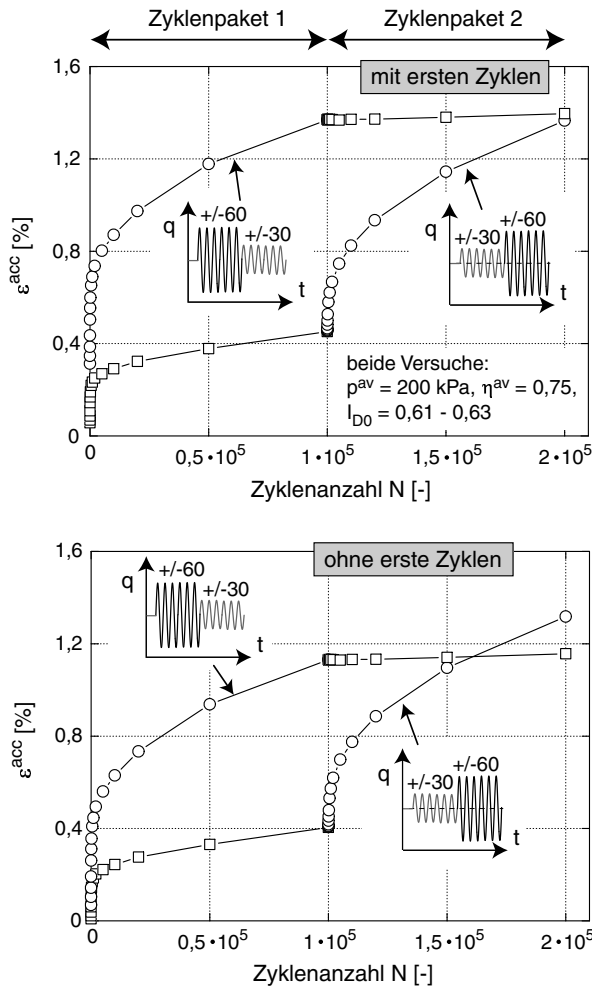


Bild 7: Akkumulationskurven  $\varepsilon^{\text{acc}}(N)$  in zwei Versuchen mit den Amplituden  $q^{\text{ampl}} = 30$  und  $60$  kPa: a) inklusive der Dehnungen in den ersten Zyklen der Pakete, b) ohne diese Dehnungen

In [8], [15] wurde gezeigt, dass die Akkumulation der Dehnung unter zyklischer Belastung einer Art Fließrichtung folgt. Das Verhältnis der deviatorischen und volumetrischen Akkumulationsrate  $\dot{\varepsilon}_q^{\text{acc}}/\dot{\varepsilon}_v^{\text{acc}}$  wird hauptsächlich vom mittleren Spannungsverhältnis  $\eta^{\text{av}} = q^{\text{av}}/p^{\text{av}}$  bestimmt. Das Bild 8 zeigt die  $\varepsilon_q^{\text{acc}}-\varepsilon_v^{\text{acc}}$ -Dehnungspfade in den Versuchen 60  $\rightarrow$  30 und 30  $\rightarrow$  60.

Im Versuch 30  $\rightarrow$  60 war eine leichte Zunahme des Verhältnisses  $\dot{\varepsilon}_q^{\text{acc}}/\dot{\varepsilon}_v^{\text{acc}}$  beim Wechsel von der kleineren zur größeren Amplitude zu beobachten. Ansonsten ist der Einfluss der Reihenfolge der Zyklpakete auf den  $\varepsilon_q^{\text{acc}}-\varepsilon_v^{\text{acc}}$ -Dehnungspfad eher gering.

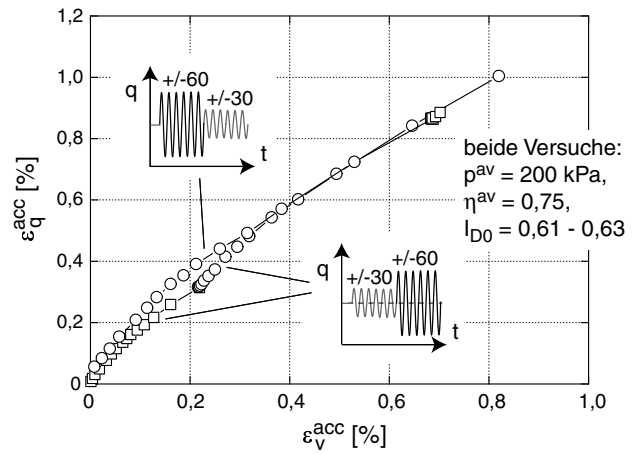


Bild 8:  $\varepsilon_q^{\text{acc}}-\varepsilon_v^{\text{acc}}$ -Dehnungspfade in zwei Versuchen mit den Amplituden  $q^{\text{ampl}} = 30$  und  $60$  kPa

In einer zweiten Reihe wurden sechs Versuche mit jeweils vier Zyklpaketen durchgeführt. Jedes Paket umfasste 25.000 Zyklen. Die Reihenfolge der Amplituden  $q^{\text{ampl}} = 20, 40, 60$  und  $80$  kPa wurde variiert. Einen Überblick über die getesteten Reihenfolgen gibt das Bild 9.

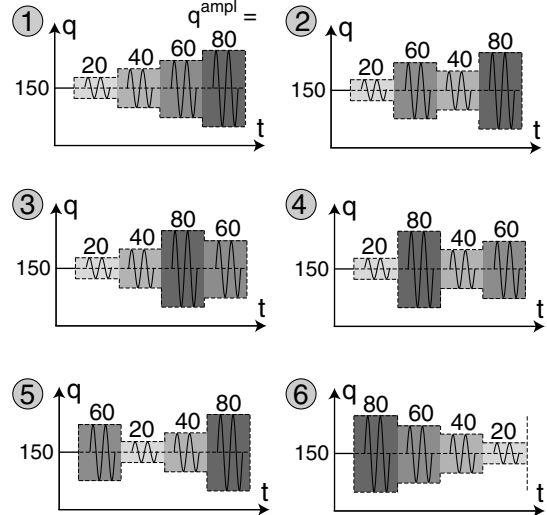


Bild 9: Getestete Reihenfolgen der Amplituden  $q^{\text{ampl}} = 20, 40, 60$  und  $80$  kPa

Das Bild 10 zeigt die  $q-\varepsilon_1$ -Hysteresen der sechs Versuche. Das Teildiagramm 10d mit dem Versuch 20  $\rightarrow$  80  $\rightarrow$  40  $\rightarrow$  60 macht deutlich, dass ein Paket mit kleinen Zyklen (hier  $q^{\text{ampl}} = 20$  kPa) die Steifigkeit bei einer weiteren monotonen Belastung erhöht (in diesem Fall bis zum Erreichen einer Deviatorspannung  $q \approx q^{\text{av}} + 3q^{\text{ampl}} = 210$  kPa). In diesem Bereich des

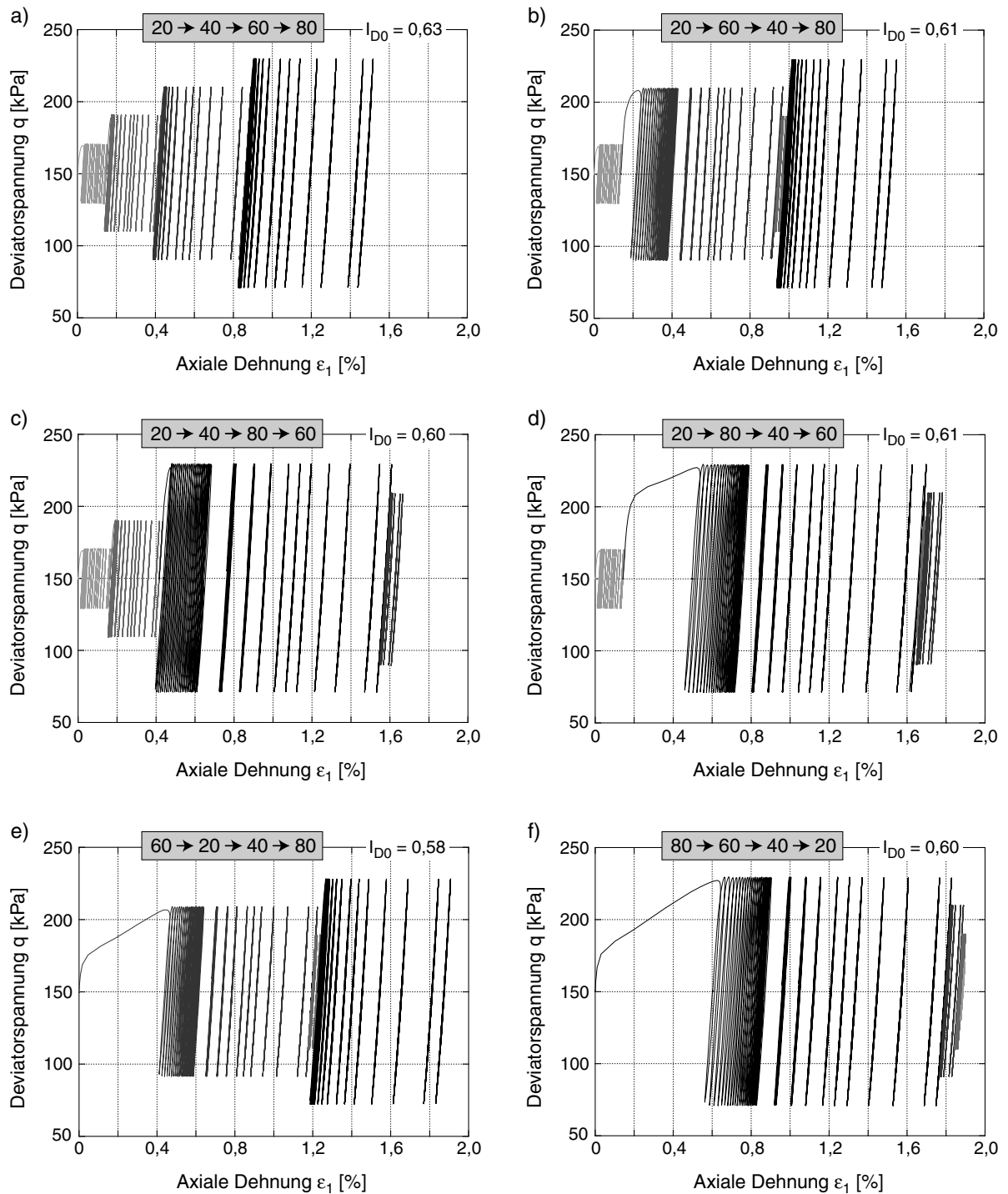


Bild 10:  $q$ - $\varepsilon_1$ -Hysteresen in sechs Versuchen mit Zykluspaketen mit den Amplituden  $q^{ampl} = 20, 40, 60$  und  $80$  kPa in unterschiedlicher Reihenfolge ( $p^{av} = 200$  kPa,  $\eta^{av} = 0,75$ ,  $f_B = 0,25$  Hz)

Spannungspfades ist die Steifigkeit während der monotonen Belastung etwa identisch mit der Sekantensteifigkeit während der vorangegangenen zyklischen Belastung. Diese Steifigkeitserhöhung reduziert die bleibende Dehnung im ersten Zyklus eines folgenden Paketes mit größerer Amplitude (hier  $q^{\text{ampl}} = 80$  kPa) drastisch. Dies führt dazu, dass die Dehnungen in den Anfangszyklen bei einer Anordnung der Pakete in der Reihenfolge  $20 \rightarrow 40 \rightarrow 60 \rightarrow 80$  verschwindend gering sind (Bild 10a). Je früher die Pakete mit größeren Amplituden aufgebracht werden, desto größer sind die bleibenden Verformungen in deren Anfangszyklen.

Das Bild 11 zeigt die Verläufe der Dehnungsamplituden mit  $N$  in den beiden Versuchen mit den Reihenfolgen  $20 \rightarrow 40 \rightarrow 60 \rightarrow 80$  und  $80 \rightarrow 60 \rightarrow 40 \rightarrow 20$ . Eine Abnahme der Dehnungsamplitude  $\varepsilon^{\text{ampl}}$  mit  $N$  zu Beginn eines Zykluspaketes war bei den größeren Spannungsamplituden  $q^{\text{ampl}} \geq 60$  kPa immer dann zu beobachten, wenn in den vorangegangenen Paketen keine größeren Amplituden  $q^{\text{ampl}}$  als diejenige des aktuellen Paketes aufgebracht wurden.

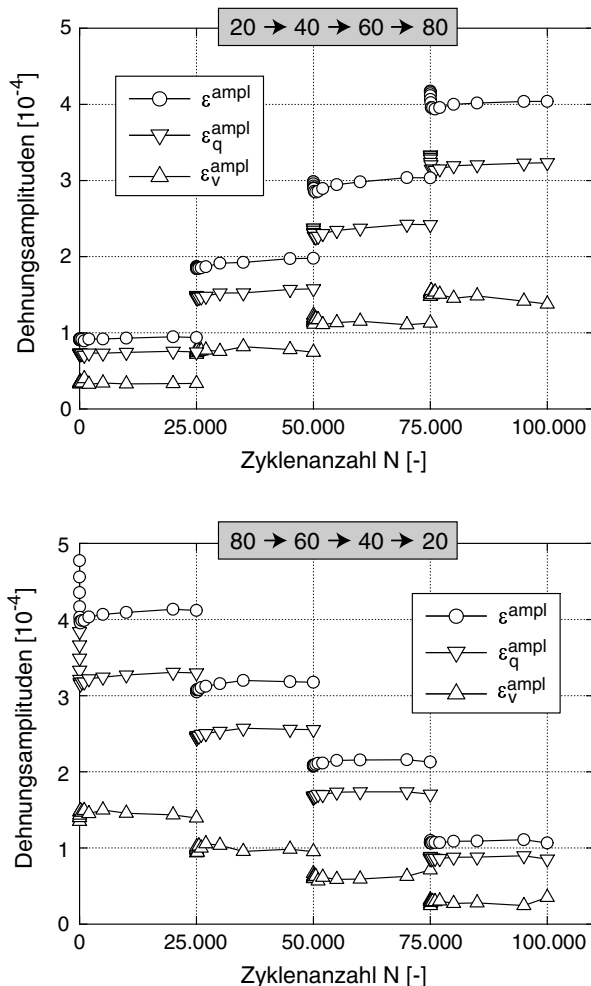


Bild 11: Dehnungsamplituden als Funktion der Zyklanzahl  $N$  in sechs Versuchen mit Zykluspaketen mit Amplituden  $q^{\text{ampl}} = 20, 40, 60$  und  $80$  kPa in unterschiedlicher Reihenfolge ( $p^{\text{av}} = 200$  kPa,  $\eta^{\text{av}} = 0,75$ ,  $f_B = 0,25$  Hz)

Das Bild 12a zeigt die Entwicklung der bleibenden Dehnungen  $\varepsilon^{\text{acc}}$  inklusive der Dehnungen in den ersten Zyklen der Pakete. Die bleibende Dehnung am Ende des vierten Zykluspaketes war umso größer, je früher die Pakete mit größeren Amplituden ( $q^{\text{ampl}} \geq 60$  kPa) aufgebracht wurden. Dies ist auf die dann größeren bleibenden Dehnungen in den ersten Zyklen zurückzuführen (Bild 10). Subtrahiert man die Dehnungen in den Anfangszyklen, erhält man Bild 12b. Hier zeigt sich, dass die Dehnungsakkumulation umso schneller verläuft, je später die Zykluspakete mit den größeren Amplituden aufgebracht werden. Diese langsamere Akkumulation in den Versuchen mit einer frühen Applikation der großen Amplituden erklärt sich mit der größeren Verdichtung in den Anfangszyklen und den daraus folgenden kleineren Porenzahlen (= kleinere Akkumulationsraten) zu Beginn der weiteren Zyklen.

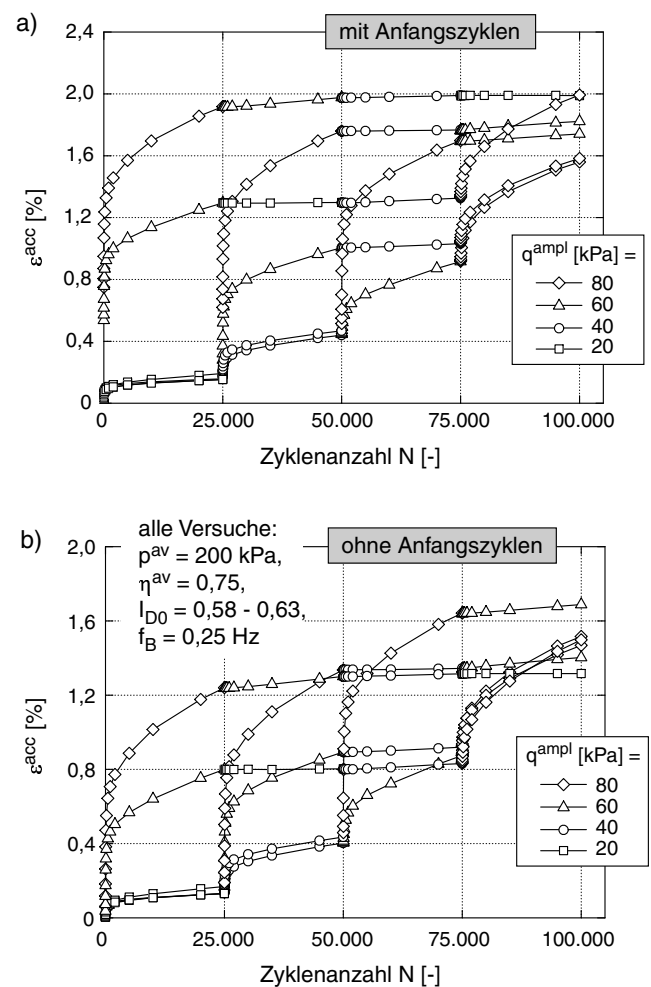


Bild 12: Akkumulationskurven  $\varepsilon^{\text{acc}}(N)$ : a) mit und b) ohne die bleibenden Dehnungen in den Anfangszyklen, sechs Versuche mit Zykluspaketen mit Amplituden  $q^{\text{ampl}} = 20, 40, 60$  und  $80$  kPa in unterschiedlicher Reihenfolge

Die bleibenden Dehnungen am Ende der sechs Versuche unterscheiden sich um maximal 20 %. Damit wurden ähnliche Ergebnisse erhalten, wie sie auch für wesentlich kleinere Zyklanzahlen ( $N_{\text{max}} = 50$  je Paket, Bild 3)

von Kaggwa et al. [14] berichtet wurden. Ersetzt man für eine Berechnung der Akkumulation mit einem expliziten Modell eine unregelmäßige Belastung durch regelmäßige Zyklenpakete (Bild 2), kann der Einfluss der Reihenfolge dieser Pakete auf den Endwert der bleibenden Verformungen in erster Näherung vernachlässigt werden.

Die Akkumulationsrichtung  $\dot{\varepsilon}_q^{\text{acc}}/\dot{\varepsilon}_v^{\text{acc}}$  wird durch die Reihenfolge der Pakete nur leicht beeinflusst. Dies kann Bild 13 entnommen werden. Je später die größeren Amplituden aufgebracht werden, desto größer ist das Verhältnis  $\varepsilon_q^{\text{acc}}/\varepsilon_v^{\text{acc}}$  der bleibenden deviatorischen und volumetrischen Dehnung am Versuchsende. Unmittelbar nach einer Erhöhung der Amplitude wurde eine leichte Zunahme des Verhältnisses der Raten  $\dot{\varepsilon}_q^{\text{acc}}/\dot{\varepsilon}_v^{\text{acc}}$  gemessen.

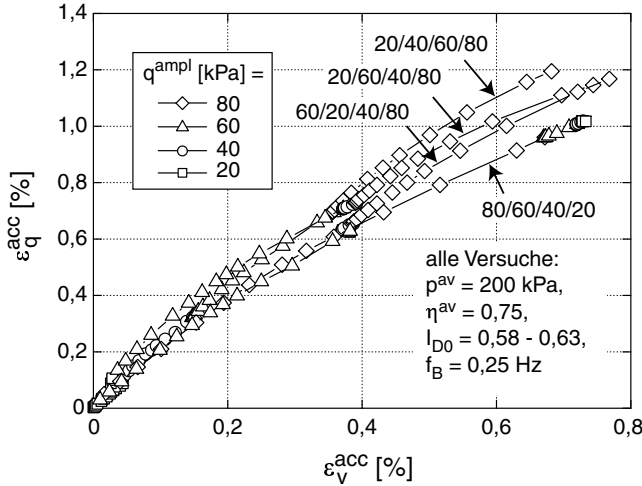


Bild 13:  $\varepsilon_q^{\text{acc}}-\varepsilon_v^{\text{acc}}$ -Dehnungspfade in Versuchen mit Zyklenpaketen mit Amplituden  $q^{\text{amp}^l} = 20, 40, 60$  und  $80$  kPa in unterschiedlicher Reihenfolge

## 5 Beschreibung der Akkumulation unter Zyklenpaketen in einem expliziten Modell

Im folgenden soll demonstriert werden, wie das in [5] näher beschriebene Akkumulationsmodell Zyklenpakete behandelt. Die Grundgleichung des Modells lautet

$$\dot{\sigma} = \mathbf{E} : (\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^{\text{acc}} - \dot{\varepsilon}^{\text{pl}}) \quad (2)$$

mit der Jaumann-Spannungsrate  $\dot{\sigma}$  des Cauchy-Spannungstensors  $\sigma$ , der druckabhängigen elastischen Steifigkeit  $\mathbf{E}$ , der Dehnungsrate  $\dot{\varepsilon}$ , der vorgegebenen Akkumulationsrate  $\dot{\varepsilon}^{\text{acc}}$  und der plastischen Dehnungsrate  $\dot{\varepsilon}^{\text{pl}}$  (für Spannungspfade, die die Fließfläche berühren). Im homogenen Fall des Triaxialversuches gilt  $\dot{\sigma} = \mathbf{0}$  und  $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^{\text{acc}}$ . Für die Akkumulationsrate wird verwendet:

$$\dot{\varepsilon}^{\text{acc}} = \dot{\varepsilon}^{\text{acc}} \mathbf{m} = f_{\text{ampl}} \dot{f}_N f_e f_p f_Y f_\pi \mathbf{m} \quad (3)$$

mit einer Fließrichtung  $\mathbf{m}$  und skalaren Funktionen der Dehnungsamplitude ( $f_{\text{ampl}}$ ), der zyklischen Vorbelastung (Historiotropie,  $\dot{f}_N$ ), der Porenzahl ( $f_e$ ), der mittleren Spannung ( $f_p$ ), des Spannungsverhältnisses ( $f_Y$ )

sowie für Polarisationsänderungen ( $f_\pi$ ). Im Kontext dieses Beitrags sind insbesondere die Funktionen  $f_{\text{ampl}}$  und  $\dot{f}_N$  von Interesse:

$$f_{\text{ampl}} = \left( \frac{\varepsilon^{\text{ampl}}}{\varepsilon_{\text{ref}}^{\text{ampl}}} \right)^2 \quad (4)$$

$$\dot{f}_N = \underbrace{\frac{C_{N1}C_{N2}}{1 + C_{N2}N}}_{\dot{f}_N^A} + \underbrace{C_{N1}C_{N3}}_{\dot{f}_N^B} \quad (5)$$

Die Funktion  $f_{\text{ampl}}$  beschreibt die quadratische Abhängigkeit der Akkumulationsrate von der Dehnungsamplitude  $\varepsilon^{\text{ampl}}$  ( $\varepsilon_{\text{ref}}^{\text{ampl}}$  ist ein Referenzwert). In Gleichung (5) sind die  $C_{Ni}$  Materialkonstanten ( $C_{N1} = 3,6 \cdot 10^{-4}$ ,  $C_{N2} = 0,43$ ,  $C_{N3} = 5,0 \cdot 10^{-5}$ ). Die Integration der Funktion  $\dot{f}_N$  führt zu Akkumulationskurven, wie sie im Bild 1 dargestellt sind:

$$\varepsilon^{\text{acc}}(N) \sim f(N) = C_{N1} [\ln(1 + C_{N2}N) + C_{N3}N] \quad (6)$$

Der Verlauf ist bis ca.  $N = 10^4$  in etwa proportional zu  $\ln(N)$ . Für größere Zyklenanzahlen wird der lineare Term  $C_{N3}N$  dominant und die bleibende Dehnung steigt überproportional zu  $\ln(N)$ . Mit Gleichung (5) kann die Akkumulation unter Zyklenpaketen jedoch nicht zutreffend beschrieben werden, da diese Funktion die Zyklenanzahl  $N$  als Variable für die zyklische Vorbelastung (Historiotropie) verwendet. Die Zyklenanzahl  $N$  enthält jedoch keinerlei Information über die Amplitude der Zyklen in der Vergangenheit. Der Wert von  $f_{\text{ampl}}$  in der Vergangenheit bestimmt jedoch wesentlich die weitere Akkumulation. Beispielsweise darf ein Paket mit  $10^6$  Zyklen mit verschwindend kleinen Amplituden (z.B.  $\varepsilon^{\text{ampl}} < 10^{-6}$ ) die Akkumulation während eines nachfolgenden Paketes mit größeren Amplituden (z.B.  $\varepsilon^{\text{ampl}} = 5 \cdot 10^{-4}$ ) nicht beeinflussen. Im Fall der Gleichung (5) besitzt das erste Paket jedoch einen großen Einfluss auf die Akkumulation während des zweiten Paketes, da die Zyklenanzahl  $N$  unabhängig von der Amplitude der Zyklen gezählt wird. Die Zyklenanzahl  $N$  ist demnach keine geeignete Variable zur Beschreibung der Historiotropie.

Statt dessen wurde die historiotrope Variable  $g^A$  eingeführt, die ebenfalls die Zyklenanzahl  $N$  mit der Dehnungsamplitude  $\varepsilon^{\text{ampl}}$  der Zyklen wichtet. Berücksichtigt wurde bei der Formulierung von  $g^A$  nur der von  $N$  abhängige Teil der Funktion  $\dot{f}_N$ :

$$g^A = \int f_{\text{ampl}} \dot{f}_N^A dN \quad (7)$$

Ersetzt man in Gleichung (5) im Term für  $\dot{f}_N^A$  die Zyklenanzahl  $N$  durch  $g^A$ , erhält man die Rate  $\dot{f}_N^A$  als Funktion von  $g^A$ :

$$\dot{f}_N^A = C_{N1}C_{N2} \exp\left(-\frac{g^A}{C_{N1} f_{\text{ampl}}}\right) \quad (8)$$

Durch die Verwendung der Gleichungen (7) und (8) wird der Verlauf der Akkumulationskurven im Bild 1 weiterhin zutreffend beschrieben, da im Spezialfall  $\varepsilon^{\text{ampl}} =$

konstant die Gleichung (6) erfüllt wird. Ein Paket von Zyklen mit verschwindend geringen Amplituden hat keinen Einfluss auf die weitere Akkumulation bei nachfolgenden, größeren Zyklen, da es  $g^A$  kaum beeinflusst. Das Bild 14 zeigt Akkumulationskurven  $\varepsilon^{\text{acc}}(N)$ , die mit Hilfe der Gleichungen (2), (3), (4), (7) und (8) für  $f_e f_p f_Y f_\pi = 1$  numerisch generiert wurden. Es wurden jeweils  $5 \cdot 10^4$  Zyklen mit den Dehnungsamplituden  $\varepsilon^{\text{ampl}} = 2 \cdot 10^{-4}$  und  $\varepsilon^{\text{ampl}} = 4 \cdot 10^{-4}$  aufgebracht, wobei die Anzahl der Pakete (zwei, vier oder acht) sowie die Reihenfolge der Pakete variiert wurde. Der Endwert der bleibenden Dehnung nach  $10^5$  Zyklen ist in den sechs Berechnungen identisch. Die Materialformulierung erfüllt demnach die Miner'sche Regel, nach der die Reihenfolge der Zyklenpakete keine Rolle spielt.

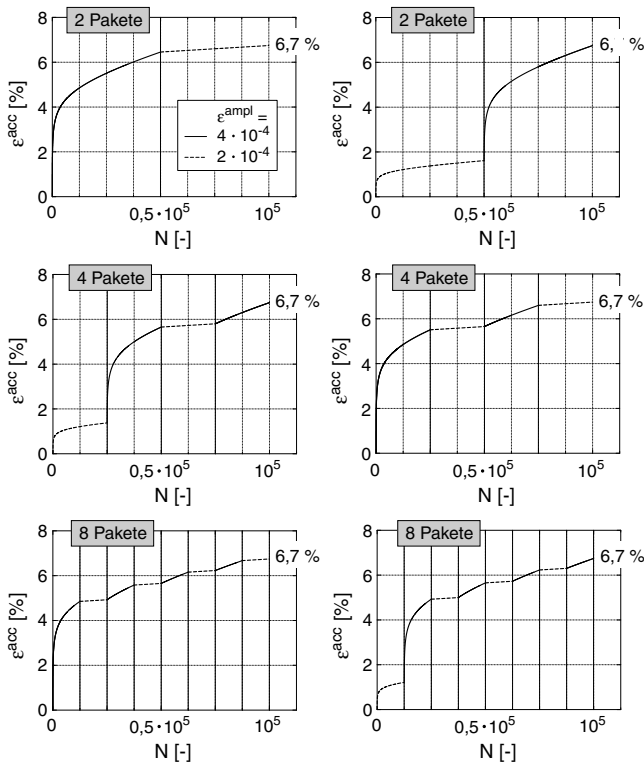


Bild 14: Numerisch generierte Akkumulationskurven  $\varepsilon^{\text{acc}}(N)$  für  $5 \cdot 10^4$  Zyklen mit der Dehnungsamplitude  $\varepsilon^{\text{ampl}} = 2 \cdot 10^{-4}$  und weitere  $5 \cdot 10^4$  Zyklen mit  $\varepsilon^{\text{ampl}} = 4 \cdot 10^{-4}$ , angeordnet in unterschiedlichen Paketen und Reihenfolgen ( $f_e f_p f_Y f_\pi = 1$ )

Die Gleichungen (2), (3), (4), (7) und (8) wurden weiterhin verwendet, um die zyklischen Triaxialversuche nachzurechnen, deren Akkumulationskurven im Bild 12 dargestellt sind. Das Bild 15 vergleicht die Kurven  $\varepsilon^{\text{acc}}(N)$  im Elementversuch und in der Nachrechnung. Zunächst ist anzumerken, dass die Akkumulationsraten für die größte Spannungsamplitude  $q^{\text{ampl}} = 80$  kPa leicht zu groß prognostiziert werden. Dies liegt daran, dass die Abhängigkeit  $\dot{\varepsilon}^{\text{acc}}(\varepsilon^{\text{ampl}})$  bei größeren Dehnungsamplituden nicht mehr quadratisch ist und ab  $\varepsilon^{\text{ampl}} \approx 10^{-3}$  die Akkumulationsrate kaum noch mit der Dehnungsamplitude steigt ( $f_{\text{ampl}} = 100$ , von die-

ser Grenze ist man hier jedoch noch weit entfernt, siehe  $\varepsilon^{\text{ampl}}(N)$  im Bild 11). Darüberhinaus gibt das explizite Akkumulationsmodell die Veränderung der Akkumulationsrate bei einer Veränderung der Lastamplitude unter Berücksichtigung der vorangegangenen zyklischen Belastung gut wieder. Die berechneten Akkumulationskurven folgen zutreffend den experimentell ermittelten Verläufen  $\varepsilon^{\text{acc}}(N)$ . Die vorgeschlagenen expliziten Gleichungen scheinen daher geeignet, das Materialverhalten unter Zyklenpaketen zu beschreiben.

Es sei jedoch darauf hingewiesen, dass bisher nur Zyklen mit konstanter Polarisation (d.h. unveränderlicher Richtung im Dehnungsraum) betrachtet wurden. Verändert sich neben der Amplitude auch die Polarisation von Zyklus zu Zyklus, kann das Materialverhalten noch wesentlich komplizierter sein. Hierzu liegen bisher jedoch keine experimentellen Untersuchungen vor.

Ein Problem für Akkumulationsprognosen stellt der unbekanntes Anfangswert der historiotropen Variable  $g_0^A$  in situ dar. Da  $g_0^A$  nicht direkt gemessen werden kann, ist es mit Hilfe von Korrelationen abzuschätzen. Trotz einiger Bemühungen [16], [17], [18], [8] existiert bisher keine etablierte Korrelation. Auch die Literatur weiß auf die Frage der Abschätzung der zyklischen Vorbelastung keine Antwort zu geben. Der Entwicklung von Methoden, mit denen  $g_0^A$  abzuschätzen ist, ist daher in Zukunft größtmögliche Aufmerksamkeit zu widmen.

## 6 Zusammenfassung

In zyklischen Triaxialversuchen an Sand wurde die Gültigkeit der Miner'schen Regel für relativ große Zyklenanzahlen ( $N \geq 10^5$ ) überprüft, d.h. der Einfluss der Reihenfolge von Zyklenpaketen mit unterschiedlichen Amplituden wurde getestet. Die bleibenden Dehnungen am Versuchsende unterschieden sich um maximal 20 %. Ersetzt man in einer Berechnung mit einem expliziten Akkumulationsmodell eine Belastung mit variierender Amplitude durch Zyklenpakete mit einer konstanten Amplitude innerhalb des Paketes, so kann der Einfluss der Reihenfolge der Zyklen im Hinblick auf den Endzustand in erster Näherung vernachlässigt werden. In diesem Beitrag wurde gezeigt, wie das in [5] detailliert erläuterte explizite Akkumulationsmodell das Materialverhalten unter Zyklenpaketen beschreibt. Hierzu wurde eine Variable für die zyklische Vorbelastung (Historiotropie) eingeführt, die neben der Anzahl auch die Amplitude der Zyklen in der Vergangenheit berücksichtigt. Eine gute Approximation der Messdaten durch das Modell konnte gezeigt werden.

## Danksagung

Diese Arbeit entstand im Rahmen des Teilprojektes A8 "Einfluss der Strukturveränderung im Boden auf die Lebensdauer von Bauwerken" im Sonderforschungsbereich 398 "Lebensdauerorientierte Entwurfskonzepte unter Schädigungs- und Deteriorationsaspekten". An dieser Stelle wird der Deutschen Forschungsgesellschaft (DFG) für die Finanzierung gedankt.



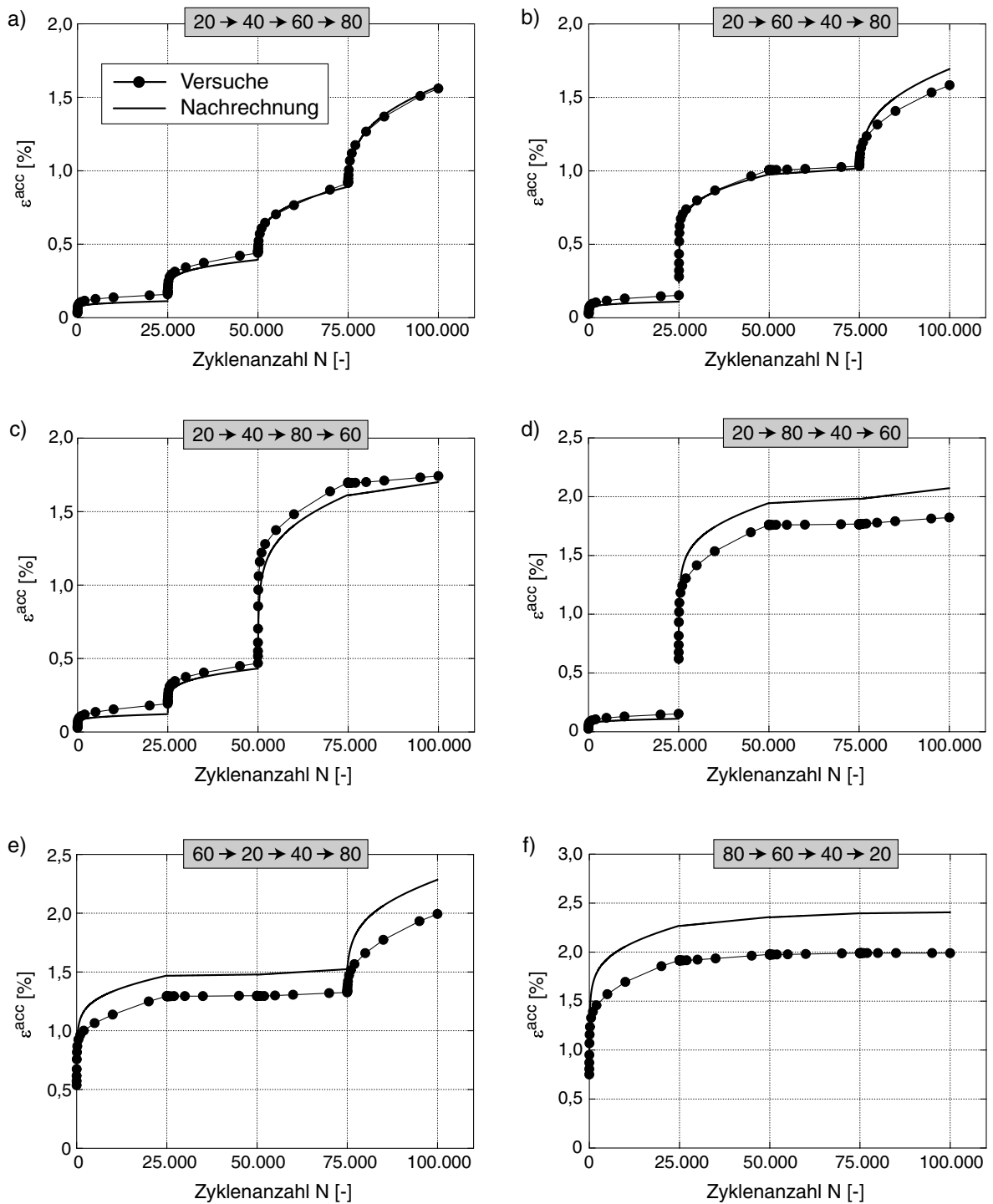


Bild 15: Validierung der historiotropen Variable  $g^A$ : Nachrechnung zyklischer Triaxialversuche mit Zyklenpaketen mit Amplituden  $q^{ampl} = 20, 40, 60$  und  $80$  kPa in unterschiedlicher Reihenfolge ( $p^{av} = 200$  kPa,  $\eta^{av} = 0,75$ ,  $0,58 \leq I_{D0} \leq 0,63$ )

## Literatur

- [1] W.A. Marr and J.T. Christian. Permanent displacements due to cyclic wave loading. *Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE*, 107(GT8):1129–1149, 1981.
- [2] G. Bouckovalas, R.V. Whitman, and W.A. Marr. Permanent displacement of sand with cyclic loading. *Journal of Geotechnical Engineering, ASCE*, 110(11):1606–1623, 1984.
- [3] A. Sawicki and W. Świdziński. Mechanics of a sandy subsoil subjected to cyclic loadings. *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, 13:511–529, 1989.
- [4] A. Gotschol. Veränderlich elastisches und plastisches Verhalten nichtbindiger Böden und Schotter unter zyklisch-dynamischer Beanspruchung. Dissertation, Universität Gh Kassel, 2002.
- [5] A. Niemunis, T. Wichtmann, and T. Triantafyllidis. A high-cycle accumulation model for sand. *Computers and Geotechnics*, 32(4):245–263, 2005.
- [6] A.S.J. Suiker and R. de Borst. A numerical model for the cyclic deterioration of railway tracks. 57:441–470, 2003.
- [7] T. Wichtmann, A. Niemunis, and T. Triantafyllidis. Setzungsakkumulation in nichtbindigen Böden unter hochzyklischer Belastung. *Bautechnik*, 82(1):18–27, 2005.
- [8] T. Wichtmann. Explicit accumulation model for non-cohesive soils under cyclic loading. PhD thesis, Publications of the Institute of Soil Mechanics and Foundation Engineering, Ruhr-University Bochum, Issue No. 38, available from [www.rz.uni-karlsruhe.de/~gn97/](http://www.rz.uni-karlsruhe.de/~gn97/), 2005.
- [9] M. Miner. Cumulative damage in fatigue. *Transactions of the American Society of Mechanical Engineering*, 67:A159–A164, 1945.
- [10] K. Ishihara and S. Yasuda. Sand liquefaction in hollow cylinder torsion under irregular excitation. *Soils and Foundations*, 15(1):29–45, 1975.
- [11] F. Tatsuoka, S. Maeda, K. Ochi, and S. Fujii. Prediction of cyclic undrained strength of sand subjected to irregular loadings. *Soils and Foundations*, 26(2):73–89, 1986.
- [12] H.B. Seed, I.M. Idriss, F. Makdisi, and N. Banerjee. Representation of irregular stress time histories by equivalent uniform stress series in liquefaction analyses. Technical Report EERC 75-29, Univ. of California, Berkeley, Calif, 1975.
- [13] H.B. Seed and I.M. Idriss. Simplified procedure for evaluating soil liquefaction potential. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE*, 97(SM9):1249–1273, 1971.
- [14] W.S. Kaggwa, J.R. Booker, and J.P. Carter. Residual strains in calcareous sand due to irregular cyclic loading. *Journal of Geotechnical Engineering, ASCE*, 117(2):201–218, 1991.
- [15] T. Wichtmann, A. Niemunis, and T. Triantafyllidis. Experimental evidence of a unique flow rule of non-cohesive soils under high-cyclic loading. *Acta Geotechnica*, 1(1):59–73, 2006.
- [16] T. Wichtmann and Th. Triantafyllidis. Influence of a cyclic and dynamic loading history on dynamic properties of dry sand, part I: cyclic and dynamic torsional prestraining. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 24(2):127–147, 2004.
- [17] T. Wichtmann and Th. Triantafyllidis. Influence of a cyclic and dynamic loading history on dynamic properties of dry sand, part II: cyclic axial preloading. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 24(11):789–803, 2004.
- [18] T. Wichtmann, A. Niemunis, T. Triantafyllidis, and M. Poblete. Correlation of cyclic preloading with the liquefaction resistance. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 25(12):923–932, 2005.

### Autoren dieses Beitrages:

Dr.-Ing. Torsten Wichtmann, Dr.-Ing. habil. Andrzej Niemunis Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Theodor Triantafyllidis, Ruhr-Universität Bochum, Lehrstuhl für Grundbau und Bodenmechanik, Universitätsstraße 150, 44780 Bochum